Halbeinfache und Nilpotente Orbiten

Jendrik Stelzner

20. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbereitung

Im Folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} k = 0$. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren und Vektorräume sind über k und endlichdimensional.

1.1 Notationen und Grundlagen

Für einen Vektorraum V sei $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der k-linearen Automorphismen von V und $\mathrm{SL}(V) = \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det \phi = 1\}$. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ die Gruppe der Lie-Algebra Automorphismen von $\mathfrak{g}$. Das *Zentrum* von $\mathfrak{g}$ ist

$$Z(\mathfrak{g}) \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

und für zwei Ideale $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$[I, J] \coloneqq \operatorname{span}_k\{[X, Y] \mid X \in I, Y \in J\}.$$

$\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ ist das *Radikal von* $\mathfrak{g}$, d.h. das eindeutige maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach* wenn $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = 0$. $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ für einfache Ideale $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathfrak{g}$. It $\mathfrak{g}$ halbeinfach so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Für $B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist

$$G_B \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T B S = B\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$,

$$\mathfrak{g}_B \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T B + BA = 0\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und G_B wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_B$.

Ist V ein Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{B} \coloneqq (v_1, \ldots, v_n)$, so beschreibt B bezüglich $\mathcal{B}$ eine Bilinearform β auf V. Unter den durch $\mathcal{B}$ induzierten Isomorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{gl}(V)$ entspricht $\mathfrak{g}_B$ entspricht der Lie-Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_\beta \coloneqq \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \beta(f(v), w) + \beta(v, f(w)) = 0 \text{ für alle } v, w \in V\}$$

und unter dem von $\mathcal{B}$ induzierten Isomorphismus von $\mathrm{GL}_n(k)$ und $\mathrm{GL}(V)$ entspricht G_B der Isometriegruppe

$$G_\beta \coloneqq \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Ist $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ eine weitere Basis von V, so wird β bezüglich $\mathcal{C}$ durch eine Matrix $C \in \mathrm{M}_n(k)$ beschrieben. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ induziert einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C$ und einen Isomorphismus von Gruppen $G_B \cong G_C$: Ist $\Omega \in \mathrm{M}_n(k)$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ (d.h. die i-te Spalte von Ω sind die Koordinaten von v_i bezüglich $\mathcal{C}$), so ist $B = \Omega^T C \Omega$ und somit

$$\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C, A \mapsto \Omega A \Omega^{-1} \quad \text{und} \quad G_B \cong G_C, S \mapsto \Omega S \Omega^{-1}.$$

1.2 Jordanzerlegung

Definition 1.1. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $x \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.2. $x \in \mathrm{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder x-invariante Untervektorraum ein x-invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $x \in \mathrm{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $x_s \in \mathrm{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $x_n \in \mathrm{End}_k(V)$.

Proposition 1.3 (Konkrete Jordanzerlegung)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $x \in \mathrm{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige Endomorphismen $x_s, x_n \in \mathrm{End}_k(V)$, so dass*
   (a) *$x = x_s + x_n$,*
   (b) *x_s ist halbeinfach und x_n nilpotent,*
   (c) *x_s und x_n kommutieren.*
2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. Insbesondere kommutiert ein Endomorphismus genau dann mit x wenn er mit x_s und x_n kommutiert.*
3. *Sind $U \subseteq W \subseteq V$ Untervektorräume mit $x(W) \subseteq U$ so ist auch $x_s(W) \subseteq U$ und $x_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.4. Ist $x \in \mathrm{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Satz 1.3 die *(konkrete) Jordanzerlegung* von x. x_s ist der *halbeinfache Teil von* x und x_n der *nilpotente Teil von* x.

Das nächste Lemma erlaubt es, die Jordanzerlegung auf halbeinfache lineare Lie-Algebren einzuschränken.

Lemma 1.5. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist $\mathfrak{g}$ eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Definition 1.6. Ein Element x einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ad-*halbeinfach*, bzw. ad-*nilpotent*, falls $\operatorname{ad} x$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.7. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra, V endlich-dimensional.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist x auch ad-halbeinfach: Es sei $v_1, \ldots, v_n$ von V, wobei v_i Eigenvektor von x zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, mit $E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$ für alle $k = 1, \ldots, n$ eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$ ist

$$\begin{aligned}
[x, E_{ij}](v_k) &= x E_{ij}(v_k) - E_{ij} x(v_k) = \delta_{jk} x(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\
&= \lambda_i \delta_{jk} v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda k) \delta_{jk} v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}(v_k),
\end{aligned}$$

und somit

$$[x, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Es ist also $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x \in \operatorname{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}$ $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$-invariant ist, ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x|_{\mathfrak{g}}$ halbeinfach.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist x auch ad-nilpotent: Es ist $\operatorname{ad} x = \lambda_x - \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$ bezeichnet. Da x nilpotent ist, sind es auch λ_x und ρ_{-x}. Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist damit auch $\operatorname{ad} x$ nilpotent.

Proposition 1.8 (Abstrakte Jordanzerlegung)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ eindeutige $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $x = x_s + x_n$,
2. *x_s ist* ad-*halbeinfach und x_n ist* ad-*nilpotent,*
3. *x_s und x_n kommutieren.*

Es ist dann $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad}(x_s)$ und $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad}(x_n)$.

Definition 1.9. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Satz 1.8 die *(abstrakte) Jordanzerlegung* von x. x_s ist der halbeinfache Teil von x und x_n der nilpotente Teil von x. x heißt *halbeinfach*, falls $x = x_s$, und *nilpotent* falls $x = x_n$.

Bemerkung 1.10. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $x \in \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, bzw. nilpotent, genau dann wenn x ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist $\mathfrak{g}$ linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen.

Lemma 1.11 (Funktorialität der Jordanzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei halbeinfache Lie-Algebren und $x \in \mathfrak{g}_1$ mit Jordanzerlegung $x = x_s + x_n$. Ist $\phi \colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ die Jordanzerlegung von $\phi(x)$.*

1.3 CSA und Wurzelraumzerlegung

Definition 1.12. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *toral* falls $\mathfrak{h}$ aus ad-halbeinfaches Elementen besteht.

Lemma 1.13. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \subseteq \operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ mit

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Es sei dann

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \coloneqq \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

Definition 1.14. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ heißen *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Lemma 1.15. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich für die Wurzeln $\Phi \coloneqq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Dies ist die *Wurzelraumzerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Die Räume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ heißen *Wurzelräume.*

Proposition 1.16 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung)**.** *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi \coloneqq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. *Φ erzeugt $\mathfrak{h}^*$ als k-Vektorraum.*
2. *Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ eine k-Basis von $\mathfrak{h}^*$, so ist $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*
3. *Für alle $\alpha \in \Phi$ ist $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.*
4. *Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind 1-dimensional.*
5. *Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ ist*
$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \\ \subseteq \mathfrak{h} & \text{falls } \alpha = -\beta. \end{cases}$$
6. *Es sei $\alpha \in \Phi$. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ ist eindimensional und $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$.*
   Insbesondere gibt es ein eindeutiges $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$ und $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Ferner ist
$$S_\alpha \coloneqq \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$
   eine Lie-Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.4 Reduktive Lie-Algebren

Lemma 1.17. *Für eine Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *für ein abelsches Ideal* $\mathfrak{a}$ *und ein halbeinfaches Ideal* $\mathfrak{s}$.
3. *Die adjugierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
4. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{s}$ *für die Zerlegungen in 1 und 2.*

Beweis. $(4 \Rightarrow 3)$ $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, da

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb $\mathfrak{g}$ halbeinfach als $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$-Modul
$(3 \Rightarrow 2)$ Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Die $\mathfrak{a}_i$ sind damit abelsch und die $\mathfrak{s}_j$ einfach. Also ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
$(2 \Rightarrow 1)$ Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.
$(1 \Rightarrow 4)$ Es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \operatorname{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \operatorname{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. □

Definition 1.18. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.17 erfüllt.

Beispiel 1.19. Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ sowie $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

Die oberen Dreiecksmatrizen

$$\mathfrak{t}_n(k) := \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix} \right\}$$

sind für $n \geq 2$ nicht reduktiv, denn $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = kI$ und

$$[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right\} =: \mathfrak{u}_n(k),$$

sind die echten oberen Dreiecksmatrizen. Aber $\mathfrak{t}_n(k) \supsetneq kI \oplus \mathfrak{u}_n(k)$.

Lemma 1.20. *Es seien* $\mathfrak{g}_1$ *und* $\mathfrak{g}_2$ *zwei reduktive Lie-Algebren mit* $\mathfrak{s}_1 := [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ *und* $\mathfrak{s}_2 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. *Ist* $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist* $\phi(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}_2$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{s}_1 = [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]$, da $\mathfrak{s}_1$ halbeinfach ist. Also ist

$$\phi(\mathfrak{s}_1) = \phi([\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]) = [\phi(\mathfrak{s}_1), \phi(\mathfrak{s}_1)] \subseteq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{s}_2. \qquad \square$$

Bemerkung 1.21. Die analoge Aussage für die Zentren von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gilt im Allgemeinen nicht. Ist etwa $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_2(k)$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, so ist die Inklusion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(k)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, aber $Z(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \subsetneq kI = Z(\mathfrak{gl}_2(k))$.

Der Begriff einer Cartan-Unteralgebra verallgemeinert sich direkt auf reduktive Lie-Algebren.

Definition 1.22. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ und die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind die *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Lemma 1.23. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{CSA \text{ in } \mathfrak{g}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{CSA \text{ in } \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$: $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra und da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra: $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf $\mathfrak{a}$ und halbeinfach auf $\mathfrak{s}$ und damit halbeinfach auf $\mathfrak{g}$. Also ist x halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra: Als Schnitt zweier Unteralgebren ist $\mathfrak{h}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und damit von $\mathfrak{s}$. Für $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$-invariant, also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.

4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA: $\mathfrak{h}'$ ist toral. Wäre $\mathfrak{h}'$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die $\mathfrak{h}'$ echt enthält. Dann wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die $\mathfrak{h}$ echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA: Wäre $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ ist

$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$

also $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von $\mathfrak{h}'$. $\square$

Korollar 1.24. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Dann ist $\mathfrak{h}$ genau dann eine CSA, wenn $\mathfrak{h}$ selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ so gibt es nach Lemma 1.23 eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.15 ist $Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gibt es eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht selbstzentralisierend. $\square$

Korollar 1.25. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}'$.*

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ für jedes $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}'$ eine Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ ist, ist $\mathfrak{g}'$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ ist.

Es ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist. Daher ist auch

$$Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h},$$

also $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.24 bereits eine CSA von $\mathfrak{g}'$. $\square$

Auch halbeinfache und nilpotente Element lassen sich auf reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

Definition 1.26. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra. $x \in \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn x ad-halbeinfach ist. x heißt *nilpotent*, wenn $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und x ad-nilpotent ist.

Beispiel 1.27. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(k)$ ist ein Element $x \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn x ein halbeinfache, bzw. nilpotente Matrix ist:

Es sei $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach im Sinne von Definition 1.26 mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\mathfrak{sl}_n(k)$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2$ ist, ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{sl}_n(k)} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{sl}_n(k)} = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{sl}_n(k)}$$

Also ist x_2 ein ad-halbeinfaches Element von $\mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\mathfrak{sl}_n(k)$ halbeinfach ist folgt, dass x_2 bereits eine halbeinfache Matrix ist. Da $x_1 \in kI$ ist auch x_1 eine halbeinfache Matrix. Da x_1 und x_2 zwei kommutierende halbeinfache Matrizen sind ist auch $x = x_1 + x_2$ eine halbeinfache Matrix.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent im Sinne von Definition 1.26, so ist $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}_n(k)$ und es folgt analog, dass x bereits eine nilpotente Matrix ist.

Bemerkung 1.28. In einer beliebigen linearen reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind halbeinfache, bzw. nilpotente Element (im Sinne von Definition 1.26) nicht notwendigerweise halbeinfach, bzw. nilpotent im Sinne der konkreten Jordanzerlegung.

So ist etwa

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in k \right\}$$

eine abelsche, und damit reduktive, Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_2(k)$. Im Sinne von Definition 1.26 sind alle Elemente aus $\mathfrak{g}$ halbeinfach, im Sinne der konkreten Jordanzerlegung ist allerdings 0 das einzige halbeinfache Element in $\mathfrak{g}$.

1.5 Innere Automorphismen

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein nilpotenten Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\exp(a) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Ist $b\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von $\mathfrak{g}$, d.h.

$$a([x,y]) = [a(x),y] + [x,a(y)] \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([x,y]) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [a^\ell(x), a^{n-\ell}(y)] \quad \text{für all } x,y \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist.

Insbesondere ist $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $x \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.29. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent erzeugt wird. Die Elemente von $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen*.

Lemma 1.30. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Dann ist*

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(x) y \exp(x)^{-1} \quad \textit{für alle } y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\operatorname{ad} x = \lambda_x + \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x ist und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$. λ_x und ρ_{-x} sind nilpotent, da x nilpotent ist. Für alle $y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_x)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_x)^n}{n!}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) y = \lambda_{\exp(x)}(y).$$

Analog ergibt sich, dass

$$\exp(\rho(-x)) = \rho_{\exp(-x)} = \rho_{\exp(x)^{-1}}.$$

Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist daher für alle $y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(\lambda_x + \rho_{-x})(y) = \lambda_{\exp(x)}\rho_{\exp(x)^{-1}}(y) = \exp(x) y \exp(x)^{-1}.$$

□

Beispiel 1.31. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$. Ist $x \in \mathfrak{g}_B \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ nilpotent, so ist $\exp(x) \in G_B$. Also ist jedes $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ durch Konjugation mit passenden $S \in G_B$ gegeben.

Lemma 1.32. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *reduktiv und* $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Dann ist* $\mathfrak{s}$ *invariant unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *und*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}\mathfrak{g} &\cong \operatorname{Int}\mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\mapsfrom \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\operatorname{ad}_{Z(\mathfrak{g})} x_1) \oplus (\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2.$$

Somit ist x genau dann ad-nilpotent in $\mathfrak{g}$, wenn x_2 ad-nilpotent in $\mathfrak{s}$ ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x) = \exp(0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2).$$

Damit ist

$$\operatorname{Int}\mathfrak{s} = \langle \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle$$

und

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} = \left\langle \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \right\rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Lemma 1.33. *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von* $\mathfrak{g}$ *konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$*, d.h. für zwei CSA* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ *gibt es* $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *mit* $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

Korollar 1.34. *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von* $\mathfrak{g}$ *konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.23 gibt es zwei CSA $\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_2' \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1'$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.33 gibt es $\tau \in \operatorname{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}_1') = \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.32 ist $\sigma := \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_2.$$ □

Lemma 1.35. *Es sei* $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ *eine reduktive Lie-Algebra und* $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ *ein reduktive Lie-Unteralgebra mit* $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. *Dann lässt sich jeder innere Automorphismus von* $\mathfrak{g}'$ *zu einem inneren Automorphismus von* $\mathfrak{g}$ *fortsetzen.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x)$ für $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'}$-nilpotentes $x \in \mathfrak{g}'$ zu zeigen. Es sei $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2$ ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}'} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2)|_{\mathfrak{s}'}$ nilpotent. Also ist x_2 ein nilpotentes Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}'$ mit $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2$.

Mit der Inklusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ folgt aus Lemma 1.20, dass $x_2 \in \mathfrak{s}$. Aus der Funktorialität der Jordanzerlegung ergibt sich außerdem, dass x_2 bereits ein nilpotentes Element von $\mathfrak{s}$ ist.

Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2$ nilpotent und damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2 = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}(x_2)$. Damit ist $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2) \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$, und da

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

ist

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x) = \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}. \qquad \square$$

Kapitel 2

Halbeinfache Orbiten

2.1 $\mathfrak{gl}_n(k)$

Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$

der *Orbit* von X. Ein Orbit $\mathcal{O}$ heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ für ein halbeinfaches $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$.

Lemma 2.1. *Ist $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit

$$SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r), \tag{1}$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und λ_i kommt mit Vielfachheit n_i vor. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ der X auf SXS^{-1} abbildet und damit auch $\mathfrak{g}^X$ auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt also die Aussage für Diagonalmatrix der Form (1) zu zeigen.

Es sei also

$$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \tag{2}$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und λ_i komme mit Vielfachheit $n_i \geq 1$ auf. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i,j)-te Eintrag von AX ist $\mu_j a_{ij}$ und der (i,j)-te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Also ist genau dann $A \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\mu_i = \mu_j$ oder $a_{ij} = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Aus (2) ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \middle| A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \dots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k)$$

reduktiv. $\square$

Korollar 2.2. *Es sei* $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ *und* $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ *eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Dann ist* $\mathfrak{g}^X$ *die Unteralgebra der Diagonalmatrizen.*

Lemma 2.3. *Es bestehe* $T \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ *aus Diagonalmatrizen und es gebe* $X \in T$ *mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Unter der Konjugationswirkung von* $\mathrm{GL}_n(k)$ *auf* $\mathfrak{gl}_n(k)$ *besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S.T = T\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es sei $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Für $S = (s_{ij}) \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ ist dann $SXS^{-1} \in T$ eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Es ist dann

$$SX = X \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Der (i,j)-te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i,j)-te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \ldots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij}(\mu_i s_{ij'}) = s_{ij}(\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij} s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag der nicht 0 ist. Da S invertierbar ist, ist in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag verschieden von 0. Also ist in jeder Zeile von S genau eine Zeile nicht Null.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ gibt es andererseits auch $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in T$ mit

$$XS = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) X.$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der nicht 0 ist. □

Lemma 2.4. *Es sei* $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$*,* $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ *ein halbeinfacher Orbit und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ *eine CSA. Dann gibt es* $X \in \mathfrak{h}$ *mit* $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$*.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. X' ist halbeinfach, da $\mathcal{O}$ ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Da alle CSA von $\mathfrak{g}$ unter $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert sind gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesonder ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}.$$ □

Satz 2.5. *Ist* $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ *und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine CSA, so ist die Abbildung*

$$\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist besteht $\mathfrak{g}$ aus halbeinfachen Elementen. Deshalb ist $\mathcal{O}_X$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{h} \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.4 ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SXS^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Da $\tilde{\varphi}$ über φ faktorisiert ist auch φ surjektiv.

Für die Injektivität von φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $SX_2S^{-1} = X_1$. Dann sind $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$ die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.1 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv. Nach Korollar 1.25 sind $\mathfrak{h}$ und $S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Korollar 1.34 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}^X$ mit $\sigma(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h}$.

Ist $y \in \mathfrak{g}^X$ nilpotent, so ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^X}\ y)(X) = 0$, also

$$\exp(y)X_1\exp(y)^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^X}\ y)(X_1) = X_1.$$

und somit $\exp(y) \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$. Daher ist jedes Element aus $\operatorname{Int}\mathfrak{g}^X$ durch Konjugation mit einem Element aus $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben. Insbesondere ist σ durch Konjugation mit passenden $T \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(TS)\mathfrak{h}(TS)^{-1} = TS\mathfrak{h}S^{-1}T^{-1} = \sigma(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h},$$

also $TS \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$, mit

$$(TS)X_2(TS)^{-1} = TSX_2S^{-1}T^{-1} = TX_1T^{-1} = X_1.$$

Somit sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert. □

Korollar 2.6. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA und*

$$W := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}).$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/W \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \textit{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

wohldefiniert und bijektiv.

Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die CSA der Diagonalmatrizen. $\mathfrak{h}$ enthält eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen.

Nach Lemma 2.3 besteht $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ daher aus Monomialmatrizen. Andererseits wird $\mathfrak{h}$ von jeder Monomialmatrix aus $\mathrm{GL}_n(k)$ normalisiert. Also ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)}$ die Untergruppe der invertierbaren Monomialmatrizen.

Außerdem besteht $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ nach Korollar 2.2 aus Diagonalmatrizen, und jede Diagonalmatrix aus $\mathrm{GL}_n(k)$ zentralisiert $\mathfrak{h}$. Also ist $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen.

Also ist

$$W \coloneqq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)} \cong S_n$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht der Permutation der Diagonaleinträge durch S_n. Durch die zusätzliche Identifikation

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ergibt sich, dass die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ klassifiziert sind durch

$$\begin{aligned} k^n/S_n &\xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k) \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, \\ [(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] &\mapsto \mathcal{O}_{\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}, \end{aligned}$$

wobei S_n auf k^n durch Permutation der Einträge wirkt.

2.2 Der allgemeine Fall

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

der Orbit von X unter G. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathcal{O}$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\operatorname{ad} \phi(X) = \phi(\operatorname{ad} X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } \phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}.$$

Daher ist X genau dann halbeinfach wenn $\mathcal{O}_X$ ein halbeinfacher Orbit ist.

In diesem Abschnitt klassifizieren wir die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g}$. Dabei arbeiten unter der zusätzlichen Annahme, dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, dass durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Darunter fallen die folgenden Beispiele:

Beispiel 2.7. 1. $\mathrm{GL}_n(k)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und nach Lemma 1.30 ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{g}_B$ reduktiv ist. Dann wirkt G_B durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_B$, und durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass für nilpotentes $x \in \mathfrak{g}_B$ auch $\exp(x) \in G_B$. Also ist nach Lemma 1.30 jeder innere Automorphismus durch Konjugaton mit einem Element aus G_B gegeben. Hieraus ergeben sich mehrere konkrete Beispiele:

   (a) Für $B = 0$ erneut die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$

   (b) Für $I \in \mathrm{M}_n(k)$ ergibt sich die Konjugationswirkung der orthogonalen Gruppe
   $$O_n(k) \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T = S^{-1}\}$$
   auf den schiefsymmetrischen Matrizen
   $$\mathfrak{so}_n(k) \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T = -A\}.$$

(c) Für

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$

ergibt sich die Konjugationsgruppe der symplektischen Gruppe

$$\mathrm{Sp}_{2n}(k) := \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T \Omega S = \Omega\}$$

auf der symplektischen Lie-Algebra

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) := \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T \Omega + \Omega A = 0\}$$

3. Für eine beliebige reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wirkt $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ auf natürliche Weise auf $\mathfrak{g}$ und jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist insbesondere ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$.

Ist $X \in \mathrm{M}_n(k)$ nilpotent, so ist $\det \exp(X) = 1$. Da X nilpotent ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, so dass SXS^{-1} eine echte obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist auch $\sum_{m=1}^{\infty}(SXS^{-1})^m/m!$ eine echte obere Dreiecksmatrix und somit $\exp(SXS^{-1})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Damit ist

$$1 = \det(\exp(SXS^{-1})) = \det(S\exp(X)S^{-1}) = \det(\exp(X)).$$

Damit ergeben sich weitere Beispiele:

4. (a) Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$ mit $\mathfrak{g}_B$ reduktiv, so ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}_B$ bereits durch Konjugation mit einem Element aus

$$SG_B := \{S \in G_B \mid \det(S) = 1\}$$

gegeben. Inbesondere ergibt sich für $B = I$ die Konjugationswirkung von

$$SO_n(k) := \{S \in O_n(k) \mid \det S = 1\}$$

auf $\mathfrak{so}_n(k)$.

(b) Ist $\mathfrak{g}$ reduktiv, so ist für nilpotentes $X \in \mathfrak{g}$ bereits $\exp(\operatorname{ad} X) \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ und somit

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \{\phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \mid \det\phi = 1\}.$$

Proposition 2.8. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA die X enthält. Es seien $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*

$$\Phi_X := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha$$

und $\mathfrak{g}^X$ ist reduktiv.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Für $Y \in \mathfrak{g}$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha\in\Phi} Y_\alpha$ bezüglich (3) ist

$$[X, Y] = \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(X)Y_\alpha.$$

Wegen der Direktheit der Zerlegung (3) folgt, dass genau dann $Y \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\alpha(X)Y_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Also ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{4}$$

Für $Z(\mathfrak{g}^X)$ ergibt sich, dass

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha\in\Phi} \ker \alpha. \tag{5}$$

Denn es ist

$$Z(\mathfrak{g}^X) = Z_{\mathfrak{g}^X}(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$

und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist

$$[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha\in\Phi_X} \alpha(Y)\mathfrak{g}_\alpha,$$

also $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von $\mathfrak{g}^X$ gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$. Da $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$, da $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Es ist also

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X,$$

aber $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ ist nicht auflösbar. □

Als erste Annäherung ergibt sich, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$: Andernfalls gebe es $Y \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha\in\Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und

$$\Psi := \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Da $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist für alle $h \in \mathfrak{h}$ und $\ell \geq 1$ auch

$$\operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X.$$

Behauptung 2. Es gibt $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(h) \neq \beta(h)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des natürlichen Isomorphismus $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^{**}$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}_k \Phi$ gibt es eine k-Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ von $\mathfrak{h}^*$. k ist algebraisch abgeschlossen und somit unendlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Also gibt es $z_1, \dots, z_n \in k$ die linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Es sei $\varphi \colon \mathfrak{h}^* \to k$ die k-lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. □

Es sei $h \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2. Für $\ell = 1, \dots, n$ sei

$$Z_\ell \coloneqq \operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Es sei $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Da die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ eindimensional sind ist $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Psi}$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $\{Z_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0. \end{aligned}$$

Da $Z_1, \dots, Z_n \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da $\Psi \neq 0$ gibt damit $\alpha \in \Psi \subseteq \Phi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, im Widerspruch zu Behauptung 1. Also ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (5) ein $\alpha \in \mathfrak{g}^X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist damit

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

im Widerspruch zu Behauptung 1. Insgesamt zeigt dies, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. □

Korollar 2.9. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} \coloneqq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Annahme ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2$ ist halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2$, also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach und somit X_2 ein halbeinfaches Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$. Damit ist $\mathfrak{s}^{X_2}$ nach Proposition 2.8 reduktiv und somit auch

$$\mathfrak{g}^X = Z(\mathfrak{g})^{X_1} \oplus \mathfrak{s}^{X_2} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}^{X_2},$$

da $Z(\mathfrak{g})$ abelsch ist. □

Lemma 2.10. *Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Dann gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Beweis. Nach Korollar 1.34 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ und nach Annahme gibt es $s \in G$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = s \cdot \mathfrak{h}_1$. □

Korollar 2.11. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. Dann ist X' halbeinfach und in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ einhalten. Nach Lemma 2.10 gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Dann ist $X \coloneqq s \cdot X' \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$. □

Satz 2.12. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi \colon \mathfrak{h}/N_G(\mathfrak{h}) \to \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \textit{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ aus halbeinfachen Elementen besteht und $\mathcal{O}_{s \cdot X} = \mathcal{O}_X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $s \in G$ ist Φ wohldefiniert. Nach Korollar 2.11 ist Φ surjektiv.

Es seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$. Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass X_1 und X_2 unter G konjugiert sind. Da $X_1 \in \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $s \in G$ mit $s \cdot X_2 = X_1$. $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ sind zwei CSA von $\mathfrak{g}$, die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind ist bereits $\mathfrak{h}, s \cdot \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$, wobei $\mathfrak{g}^{X_1}$ nach Proposition 2.8 reduktiv ist. Nach Korollar 1.25 sind $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$.

Nach Korollar 1.34 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Behauptung. Es ist $\sigma(X_1) = X_1$.

Beweis. Für $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}$-nilpotentes $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ ist ist $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = 0$ und somit

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)^n}{n!}(X_1) = X_1. \qquad \square$$

Nach Lemma 1.35 lässt sich σ zu einem inneren Automorphismus $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ fortsetzen. Nach Annahme gibt es $t \in G$, so dass t durch τ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Zum einen ist

$$t \cdot s \cdot \mathfrak{h} = \tau(s \cdot \mathfrak{h}) = \sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},$$

also $t \cdot s \in N_G(\mathfrak{h})$. Zum anderen ist $X_1 \in \mathfrak{g}^{X_1}$ und somit

$$t \cdot s \cdot X_2 = t \cdot X_1 = \tau(X_1) = \sigma(X_1) = X_1. \qquad \square$$

Korollar 2.13. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und*

$$W \coloneqq N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}).$$

Dann ist

$$\Phi \colon \mathfrak{h}/W \to \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \textit{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert und bijektiv.

2.3 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$

In diesem Abschnitt wollen wir die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}k$ unter der Konjugationswirkung von $O_{2n}(k)$ und $SO_{2n}(k)$ bestimmen. Hierfür nutzen wir die folgende Beschreibung von $\mathfrak{so}_{2n}k$, $O(2n)$ und $SO(2n)$:

Es sei

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k).$$

Dann sei

$$\begin{aligned} O(2n) &:= G_J = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^T J S = J\}, \\ SO(2n) &:= \{S \in O(2n) \mid \det S = 1\}, \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{so}_{2n}k = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T J + JA = 0\}.$$

Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$ sei $A^S := (a_{n+1-j,n+1-i})_{ij}$ das Transponierte von A an der Antidiagonalen. A^S kann auch beschrieben werden durch

$$JA^T J = J(a_{ij})_{ij}^T J = J(a_{ji})_{ij} J = J(a_{j,n+1-i})_{ij} = (a_{n+1-j,n+1-i})_{ij} = A^S.$$

Da $J^2 = I$ ist damit

$$O(2n) = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^{-1} = S^S\}$$

sowie

$$\mathfrak{so}_{2n}k = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^S = -A\}.$$