Halbeinfache und Nilpotente Orbiten

Jendrik Stelzner

19. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen oder so

Im Folgend sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper von Charakteristik 0. Alle Lie-Algebren und Vektorräume sind über k, sofern nicht anders angegeben. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren endlichdimensional über k.

1.1 Jordanzerlegung

Definition 1.1. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $x \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.2. $x \in \mathrm{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder x-invariante Untervektorraum ein x-invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $x \in \mathrm{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $x_s \in \mathrm{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $x_n \in \mathrm{End}_k(V)$.

Proposition 1.3 (Konkrete Jordanzerlegung)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $x \in \mathrm{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige Endomorphismen $x_s, x_n \in \mathrm{End}_k(V)$, so dass*
   (a) $x = x_s + x_n$,
   (b) *x_s ist halbeinfach und x_n nilpotent,*
   (c) *x_s und x_n kommutieren.*
2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. Insbesondere kommutiert ein Endomorphismus genau dann mit x wenn er mit x_s und x_n kommutiert.*
3. *Sind $U \subseteq W \subseteq V$ Untervektorräume mit $x(W) \subseteq U$ so ist auch $x_s(W) \subseteq U$ und $x_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.4. Ist $x \in \mathrm{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Satz 1.3 die *(konkrete) Jordanzerlegung* von x. x_s ist der *halbeinfache Teil von* x und x_n der *nilpotente Teil von* x.

Das nächste Lemma erlaubt es, die Jordanzerlegung auf halbeinfache lineare Lie-Algebren einzuschränken.

Lemma 1.5. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist $\mathfrak{g}$ eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}\mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Definition 1.6. Ein Element x einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ad-*halbeinfach*, bzw. ad-*nilpotent*, falls $\mathrm{ad}x$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.7. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra, V endlich-dimensional.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist x auch ad-halbeinfach: Es sei $v_1, \dots, v_n$ von V, wobei v_i Eigenvektor von x zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist E_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, mit $E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$ für alle $k = 1, \dots, n$ eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned}[x, E_{ij}](v_k) &= xE_{ij}(v_k) - E_{ij}x(v_k) = \delta_{jk}x(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\ &= \lambda_i \delta_{jk} v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda k)\delta_{jk} v_i \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}(v_k),\end{aligned}$$

und somit

$$[x, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Es ist also $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x \in \mathrm{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}$ $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$-invariant ist, ist damit auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x|_{\mathfrak{g}}$ halbeinfach.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist x auch ad-nilpotent: Es ist $\mathrm{ad}x = \lambda_x - \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$ bezeichnet. Da x nilpotent ist, sind es auch λ_x und ρ_{-x}. Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist damit auch $\mathrm{ad}x$ nilpotent.

Proposition 1.8 (Abstrakte Jordanzerlegung)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ eindeutige $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $x = x_s + x_n$,
2. *x_s ist* ad-*halbeinfach und x_n ist* ad-*nilpotent,*
3. *x_s und x_n kommutieren.*

Es ist dann $(\mathrm{ad}x)_s = \mathrm{ad}(x_s)$ und $(\mathrm{ad}x)_n = \mathrm{ad}(x_n)$.

Definition 1.9. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Satz 1.8 die *(abstrakte) Jordanzerlegung* von x. x_s ist der halbeinfache Teil von x und x_n der nilpotente Teil von x. x heißt *halbeinfach*, falls $x = x_s$, und *nilpotent* falls $x = x_n$.

Bemerkung 1.10. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $x \in \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, bzw. nilpotent, genau dann wenn x ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist $\mathfrak{g}$ linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen.

1.2 CSA und Wurzelraumzerlegung

Definition 1.11. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *toral* falls $\mathfrak{h}$ aus ad-halbeinfaches Elementen besteht.

Lemma 1.12. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ für

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Definition 1.13. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

heißen *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Lemma 1.14. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich mit $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Dies ist die *Wurzelraumzerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Proposition 1.15 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung)**.** *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. *Φ spannt $\mathfrak{h}^*$ als k-Vektorraum.*
2. *Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ eine k-Basis von $\mathfrak{h}^*$, so ist $\Phi \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*
3. *Für alle $\alpha \in \Phi$ ist $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.*
4. *Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind 1-dimensional.*
5. *Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ ist*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = 0 & \textit{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \textit{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \\ \subseteq \mathfrak{h} & \textit{falls } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

6. *Es sei $\alpha \in \Phi$. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ ist eindimensional und $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$.*

   Insbesondere gibt es ein eindeutiges $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$ und $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Ferner ist

$$S_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$

   eine Lie-Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.3 Reduktive Lie-Algebren

1.3.1 Definition

Lemma 1.16. *Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *für ein abelsches Ideal* $\mathfrak{a}$ *und ein halbeinfaches Ideal* $\mathfrak{s}$.
3. *Die adjugierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
4. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{s}$ *für die Zerlegungen in 1 und 2.*

Beweis.
($4 \Rightarrow 3$) $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ ist halbeinfach, da

$$\operatorname{ad}\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb $\mathfrak{g}$ als $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$-Modul halbeinfach.
($3 \Rightarrow 2$) Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Die $\mathfrak{a}_i$ sind damit abelsch und die $\mathfrak{s}_j$ einfach. Also ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
($2 \Rightarrow 1$) Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.
($1 \Rightarrow 4$) Es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \operatorname{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \operatorname{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. □

Definition 1.17. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.16 erfüllt.

Beispiel 1.18. $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = \mathfrak{s}_n(k)$ und $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k) = \mathfrak{s}_n(k) \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind stets reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

Im Gegensatz dazu ist $\mathfrak{t}_n(k)$ ist für $n \geq 2$ nicht reduktiv, da $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = \mathfrak{s}_n(k)$ und $[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \mathfrak{u}_n(k)$, aber $\mathfrak{t}_n(k) \supsetneq \mathfrak{s}_n(k) \oplus \mathfrak{u}_n(k)$.

1.3.2 Cartan-Unteralgebren

Definition 1.19. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra. Ein ELement $x \in \mathfrak{g}$ ist *halbeinfach* wenn x ad-halbeinfach ist und *nilpotent*, wenn $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und x ad-nilpotent ist.

Definition 1.20. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

sind die *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Lemma 1.21. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra,* $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ *und* $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathit{CSA\ in}\ \mathfrak{g}\} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\mathit{CSA\ in}\ \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$: $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra und da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra: $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf $\mathfrak{a}$ und halbeinfach auf $\mathfrak{s}$ und damit halbeinfach auf $\mathfrak{g}$. Also ist x halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra: Als Schnitt zweier Uenteralgebren ist $\mathfrak{h}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und damit von $\mathfrak{s}$. Für $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$-invariant, also ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'} x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.

4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA: $\mathfrak{h}'$ ist toral. Wäre $\mathfrak{h}'$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die $\mathfrak{h}'$ echt enthält. Dann wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die $\mathfrak{h}$ echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA: Wäre $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ ist

$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$

also $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von $\mathfrak{h}'$. □

Korollar 1.22. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine torale Unteralgebra. Dann ist* $\mathfrak{h}$ *genau dann eine CSA, wenn* $\mathfrak{h}$ *selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ so gibt es nach Lemma 1.21 eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.14 ist $Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gibt es eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht selbstzentralisierend. □

Korollar 1.23. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra,* $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Unteralgebra und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine CSA mit* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. *Dann ist* $\mathfrak{h}$ *eine CSA von* $\mathfrak{g}'$.

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ für jedes $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}'$ eine Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ ist, ist $\mathfrak{g}'$ invariant unter $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Also ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ ist.

Es ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist. Daher ist auch

$$Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h},$$

also $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.22 bereits eine CSA von $\mathfrak{g}'$. □

1.4 Innere Automorphismen

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein nilpotenten Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\exp(a) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Ist $b\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von $\mathfrak{g}$, d.h.

$$a([x,y]) = [a(x),y] + [x,a(y)] \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([x,y]) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [a^\ell(x), a^{n-\ell}(y)] \quad \text{für all } x,y \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist.

Insbesondere ist $\exp(\mathrm{ad} x) \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $x \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.24. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von Automorphismen $\exp(\mathrm{ad} x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent erzeugt wird. Die Elemente von $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen.*

Lemma 1.25. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Dann ist*

$$\exp(\mathrm{ad} x)(y) = \exp(x) y \exp(x)^{-1} \quad \textit{für alle } y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\mathrm{ad} x = \lambda_x + \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x ist und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$. λ_x und ρ_{-x} sind nilpotent, da x nilpotent ist. Für alle $y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_x)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_x)^n}{n!}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) y = \lambda_{\exp(x)}(y).$$

Analog ergibt sich, dass

$$\exp(\rho(-x)) = \rho_{\exp(-x)} = \rho_{\exp(x)^{-1}}.$$

Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist daher für alle $y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\mathrm{ad} x)(y) = \exp(\lambda_x + \rho_{-x})(y) = \lambda_{\exp(x)} \rho_{\exp(x)^{-1}}(y) = \exp(x) y \exp(x)^{-1}.$$

□

Korollar 1.26. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ eine Untergruppe mit $\exp(x) \in G$ für jedes nilpotente $x \in \mathfrak{g}$. Dann ist jedes Element $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ durch Konjugation mit einem Element $S \in G$ gegeben.*

Lemma 1.27. *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$, d.h. für zwei CSA $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Lemma 1.28. *Es sei $\mathfrak{g}$ reduktiv und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann ist $\mathfrak{s}$ invariant unter $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$ und*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} \mathfrak{g} &\cong \operatorname{Int} \mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\leftarrow\!\shortmid \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\mathrm{ad}_{Z(\mathfrak{g})} x_1) \oplus (\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = 0 \oplus \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x_2.$$

Somit ist x genau dann ad-nilpotent in $\mathfrak{g}$, wenn x_2 ad-nilpotent in $\mathfrak{s}$ ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x) = \exp(0 \oplus \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x_2).$$

Damit ist

$$\operatorname{Int} \mathfrak{s} = \langle \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle$$

und

$$\operatorname{Int} \mathfrak{g} = \left\langle \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \right\rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Korollar 1.29. *Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.21 gibt es zwei CSA $\mathfrak{h}'_1, \mathfrak{h}'_2 \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_1$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_2$. Nach Lemma 1.27 gibt es $\tau \in \operatorname{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{h}'_2$. Nach Lemma 1.28 ist $\sigma := \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_1) = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_2 = \mathfrak{h}_2.$$ □

Kapitel 2

Halbeinfache Orbiten

2.1 $\mathfrak{gl}_n(k)$

Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei
$$\mathcal{O}_X := \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$
der *Orbit* von X. Ein Orbit $\mathcal{O}$ heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ für ein halbeinfaches $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$.

Lemma 2.1. *Ist $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit
$$SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r), \tag{1}$$
$\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und λ_i kommt mit Vielfachheit n_i vor. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ der X auf SXS^{-1} abbildet und damit auch $\mathfrak{g}^X$ auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt also die Aussage für Diagonalmatrix der Form (1) zu zeigen.

Es sei also
$$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \tag{2}$$
mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und λ_i komme mit Vielfachheit $n_i \geq 1$ auf. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i, j)-te Eintrag von AX ist $\mu_j a_{ij}$ und der (i, j)-te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Also ist genau dann $A \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\mu_i = \mu_j$ oder $a_{ij} = 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Aus (2) ergibt sich damit, dass
$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \;\middle|\; A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \ldots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$
Insbesondere ist
$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k)$$
reduktiv. □

Korollar 2.2. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Dann ist $\mathfrak{g}^X$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen.*

Lemma 2.3. *Es bestehe $T \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ aus Diagonalmatrizen und es gebe $X \in T$ mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S.T = T\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es sei $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Für $S = (s_{ij}) \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ ist dann $SXS^{-1} \in T$ eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Es ist dann

$$SX = X\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Der (i, j)-te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i, j)-te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \ldots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij}(\mu_i s_{ij'}) = s_{ij}(\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij} s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag der nicht 0 ist. Da S invertierbar ist, ist in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag verschieden von 0. Also ist in jeder Zeile von S genau eine Zeile nicht Null.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ gibt es andererseits auch $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in T$ mit

$$XS = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)X.$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der nicht 0 ist. □

Lemma 2.4. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. X' ist halbeinfach, da $\mathcal{O}$ ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Da alle CSA von $\mathfrak{g}$ unter $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert sind gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesonder ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}.$$ □

Satz 2.5. *Ist $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist die Abbildung*

$$\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist besteht $\mathfrak{g}$ aus halbeinfachen Elementen. Deshalb ist $\mathcal{O}_X$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{h} \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.4 ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SXS^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Da $\tilde{\varphi}$ über φ faktorisiert ist auch φ surjektiv.

Für die Injektivität von φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $SX_2S^{-1} = X_1$. Dann sind $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$ die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.1 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv. Nach Korollar 1.23 sind $\mathfrak{h}$ und $S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Korollar 1.29 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^X$ mit $\sigma(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h}$.

Ist $y \in \mathfrak{g}^X$ nilpotent, so ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^X} y)(X) = 0$ und somit

$$\exp(y)X_1\exp(y)^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^X} y)(X_1) = X_1.$$

Für die Untergruppe

$$G \coloneqq \{T \in \mathrm{GL}_n(k) \mid TX_1T^{-1} = X_1\} = Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$$

ist also $\exp(y) \in G$ für alle nilpotenten $y \in \mathfrak{g}^X$. Nach Korollar 1.26 ist daher jedes Element von $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^X$ durch Konjugation mit einem Element aus G gegeben. Insbesondere ist σ durch Konjugation mit passenden $T \in G$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(TS)\mathfrak{h}(TS)^{-1} = TS\mathfrak{h}S^{-1}T^{-1} = \sigma(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h},$$

also $TS \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$, mit

$$(TS)X_2(TS)^{-1} = TSX_2S^{-1}T^{-1} = TX_1T^{-1} = X_1.$$

Somit sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert. □

Korollar 2.6. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA und*

$$W \coloneqq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}).$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/W \to \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

eine wohldefinierte Bijektion.

2.2 Allgemeiner

Proposition 2.7. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA die X enthält. Es seien $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*

$$\Phi_X := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha$$

und $\mathfrak{g}^X$ ist reduktiv.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Für $Y \in \mathfrak{g}$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} Y_\alpha$ bezüglich (3) ist

$$[X, Y] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(X) Y_\alpha.$$

Wegen der Direktheit der Zerlegung (3) folgt, dass genau dann $Y \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\alpha(X) Y_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Also ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{4}$$

Für $Z(\mathfrak{g}^X)$ ergibt sich, dass

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha. \tag{5}$$

Denn es ist

$$Z(\mathfrak{g}^X) = Z_{\mathfrak{g}^X}(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$

und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist

$$[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \alpha(Y) \mathfrak{g}_\alpha,$$

also $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von $\mathfrak{g}^X$ gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $k h_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Es ist also

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus k h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

aber $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ ist nicht auflösbar. □

Als erste Annäherung ergibt sich, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$: Andernfalls gebe es $Y \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha\in\Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und

$$\Psi \coloneqq \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Da $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist für alle $h \in \mathfrak{h}$ und $\ell \geq 1$ auch

$$\operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X.$$

Behauptung 2. Es gibt $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(h) \neq \beta(h)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des natürlichen Isomorphismus $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^{**}$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}_k \Phi$ gibt es eine k-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ von $\mathfrak{h}^*$. k ist algebraisch abgeschlossen und somit unendlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Also gibt es $z_1, \ldots, z_n \in k$ die linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Es sei $\varphi\colon \mathfrak{h}^* \to k$ die k-lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. □

Es sei $h \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2. Für $\ell = 1, \ldots, n$ sei

$$Z_\ell \coloneqq \operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X.$$

Es sei $\Psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Da die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ eindimensional sind ist $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Psi}$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $\{Z_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\
&= \alpha_1(h)\cdots\alpha_n(h) \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \alpha_1(h)\cdots\alpha_n(h) \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0.
\end{aligned}$$

Da $Z_1, \ldots, Z_n \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da $\Psi \neq 0$ gibt damit $\alpha \in \Psi \subseteq \Phi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$, im Widerspruch zu Behauptung 1. Also ist $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (5) ein $\alpha \in \mathfrak{g}^X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Da $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist damit

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X,$$

im Widerspruch zu Behauptung 1. Insgesamt zeigt dies, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. □