

HALBEINFACHE UND NILPOTENTE ORBITEN

Jendrik Stelzner

21. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	3
1.1	Notationen und Grundlagen	3
1.2	Jordanzerlegung	4
1.3	CSA und Wurzelraumzerlegung	6
1.4	Reduktive Lie-Algebren	7
1.5	Innere Automorphismen	10
2	Halbeinfache Orbiten	13
2.1	Motivation $\mathfrak{gl}_n(k)$	13
2.2	Der allgemeine Fall	16
2.3	$\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$	20
2.3.1	Alternative Definition	20
2.3.2	Cartan-Unteralgebra	23
2.3.3	Normalisator und Zentralisator	23

Kapitel 1

Vorbereitung

Im Folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\text{char } k = 0$. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren und Vektorräume über k und endlichdimensional.

1.1 Notationen und Grundlagen

$M_n(k)$ ist der Vektorraum der $(n \times n)$ -Matrizen über k . Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ ist

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(k).$$

$D_n(k) \subseteq \text{GL}_n(k)$ ist die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $P_n(k) \subseteq \text{GL}_n(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Eine *Monomialmatrix*, bzw. *verallgemeinerte Permutationsmatrix* ist eine Matrix $S \in M_n(k)$, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. Monomialmatrizen sind invertierbar und $\text{Mon}_n(k) \subseteq \text{GL}_n(k)$ ist die Untergruppe der Monomialmatrizen. Es ist $D_n(k), P_n(k) \subseteq \text{Mon}_n(k)$ mit $D_n(k) \cap P_n(k) = 1$. Für jedes $S \in \text{Mon}_n(k)$ gibt es eindeutige $D \in D_n(k)$ und $P \in P_n(k)$ mit $S = DP$. Daher ist auch $\text{Mon}_n(k) = D_n(k)P_n(k)$. $D_n(k)$ ist normal in $\text{Mon}_n(k)$ und somit ist $\text{Mon}_n(k) = D_n(k) \rtimes P_n(k)$, wobei \rtimes das innere semidirekte Produkt bezeichnet.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ ist die allgemeine lineare Lie-Algebra und $\mathfrak{sl}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die spezielle lineare Lie-Algebra. Es ist $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{u}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der echten oberen Dreiecksmatrizen.

Für einen Vektorraum V sei $\text{GL}(V)$ die Gruppe der k -linearen Automorphismen von V und $\text{SL}(V) = \{\phi \in \text{GL}(V) \mid \det \phi = 1\}$. Für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist $\text{Aut } \mathfrak{g}$ die Gruppe der Lie-Algebra Automorphismen von \mathfrak{g} . Das *Zentrum* von \mathfrak{g} ist

$$Z(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

und für zwei Ideale $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$[I, J] := \text{span}_k\{[X, Y] \mid X \in I, Y \in J\}.$$

Ist \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$, so ist

$$\mathfrak{g}^X := Z_{\mathfrak{g}}(X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$$

der Zentralisator von X , und für eine Teilmenge $X \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$Z_{\mathfrak{g}}(X) := \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } Y \in X\}$$

der Zentralisator von X .

$\text{rad } \mathfrak{g}$ ist das *Radikal von \mathfrak{g}* , d.h. das eindeutige maximale auflösbare Ideal von \mathfrak{g} . \mathfrak{g} heißt *halbeinfach* wenn $\text{rad } \mathfrak{g} = 0$. \mathfrak{g} ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ für einfache Ideale $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathfrak{g}$. Ist \mathfrak{g} halbeinfach so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Für $B \in M_n(k)$ ist

$$G_B := \{S \in \text{GL}_n(k) \mid S^T B S = B\}$$

eine Untergruppe von $\text{GL}_n(k)$,

$$\mathfrak{g}_B := \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T B + B A = 0\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und G_B wirkt durch Konjugation auf \mathfrak{g}_B .

Ist V ein Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$, so beschreibt B bezüglich \mathcal{B} eine Bilinearform β auf V . Unter den durch \mathcal{B} induzierten Isomorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{gl}(V)$ entspricht \mathfrak{g}_B entspricht der Lie-Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_\beta := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \beta(f(v), w) + \beta(v, f(w)) = 0 \text{ für alle } v, w \in V\}$$

und unter dem von \mathcal{B} induzierten Isomorphismus von $\text{GL}_n(k)$ und $\text{GL}(V)$ entspricht G_B der Isometriegruppe

$$G_\beta := \{f \in \text{GL}(V) \mid \beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Ist $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ eine weitere Basis von V , so wird β bezüglich \mathcal{C} durch eine Matrix $C \in M_n(k)$ beschrieben. Der Basiswechsel von \mathcal{B} nach \mathcal{C} induziert einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C$ und einen Isomorphismus von Gruppen $G_B \cong G_C$: Ist $\Omega \in M_n(k)$ die Basiswechselmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{C} (d.h. die i -te Spalte von Ω sind die Koordinaten von v_i bezüglich \mathcal{C}), so ist $B = \Omega^T C \Omega$ und somit

$$\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C, A \mapsto \Omega A \Omega^{-1} \quad \text{und} \quad G_B \cong G_C, S \mapsto \Omega S \Omega^{-1}.$$

1.2 Jordanzerlegung

Definition 1.1. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $x \in \text{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.2. $x \in \text{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder x -invariante Untervektorraum ein x -invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $x \in \text{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $x_s \in \text{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $x_n \in \text{End}_k(V)$.

Proposition 1.3 (Konkrete Jordanzerlegung). *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $x \in \text{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige Endomorphismen $x_s, x_n \in \text{End}_k(V)$, so dass*
 - (a) $x = x_s + x_n$,
 - (b) x_s ist halbeinfach und x_n nilpotent,
 - (c) x_s und x_n kommutieren.
2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. Insbesondere kommutiert ein Endomorphismus genau dann mit x wenn er mit x_s und x_n kommutiert.*
3. *Sind $U \subseteq W \subseteq V$ Untervektorräume mit $x(W) \subseteq U$ so ist auch $x_s(W) \subseteq U$ und $x_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.4. Ist $x \in \text{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Satz 1.3 die (konkrete) Jordanzerlegung von x . x_s ist der halbeinfache Teil von x und x_n der nilpotente Teil von x .

Das nächste Lemma erlaubt es, die Jordanzerlegung auf halbeinfache lineare Lie-Algebren einzuschränken.

Lemma 1.5. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so enthält \mathfrak{g} die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist \mathfrak{g} eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \text{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{ad } \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Definition 1.6. Ein Element x einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt *ad-halbeinfach*, bzw. *ad-nilpotent*, falls $\text{ad } x$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.7. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra, V endlich-dimensional.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist x auch ad-halbeinfach: Es sei v_1, \dots, v_n von V , wobei v_i Eigenvektor von x zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist E_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, mit $E_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i$ für alle $k = 1, \dots, n$ eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned} [x, E_{ij}](v_k) &= xE_{ij}(v_k) - E_{ij}x(v_k) = \delta_{jk}x(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\ &= \lambda_i \delta_{jk}v_i - \lambda_k \delta_{jk}v_i = (\lambda_i - \lambda_k) \delta_{jk}v_i \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) \delta_{jk}v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}(v_k), \end{aligned}$$

und somit

$$[x, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Es ist also $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x \in \text{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach. Da \mathfrak{g} $\text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$ -invariant ist, ist damit auch $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x = \text{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x|_{\mathfrak{g}}$ halbeinfach.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist x auch ad-nilpotent: Es ist $\text{ad } x = \lambda_x - \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$ bezeichnet. Da x nilpotent ist, sind es auch λ_x und ρ_{-x} . Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist damit auch $\text{ad } x$ nilpotent.

Proposition 1.8 (Abstrakte Jordanzerlegung). *Ist \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ eindeutige $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $x = x_s + x_n$,
2. x_s ist ad-halbeinfach und x_n ist ad-nilpotent,
3. x_s und x_n kommutieren.

Es ist dann $(\text{ad } x)_s = \text{ad}(x_s)$ und $(\text{ad } x)_n = \text{ad}(x_n)$.

Definition 1.9. Ist \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Satz 1.8 die (*abstrakte*) Jordanzerlegung von x . x_s ist der halbeinfache Teil von x und x_n der nilpotente Teil von x . x heißt *halbeinfach*, falls $x = x_s$, und *nilpotent* falls $x = x_n$.

Bemerkung 1.10. Es sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $x \in \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, bzw. nilpotent, genau dann wenn x ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist \mathfrak{g} linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf \mathfrak{g} übereinstimmen.

Lemma 1.11 (Funktorialität der Jordanzerlegung). *Es seien \mathfrak{g}_1 und \mathfrak{g}_2 zwei halbeinfache Lie-Algebren und $x \in \mathfrak{g}_1$ mit Jordanzerlegung $x = x_s + x_n$. Ist $\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\phi(x) = \phi(x_s) + \phi(x_n)$ die Jordanzerlegung von $\phi(x)$.*

1.3 CSA und Wurzelraumzerlegung

Definition 1.12. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt *toral* falls \mathfrak{h} aus ad-halbeinfachen Elementen besteht.

Lemma 1.13. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \subseteq \text{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_{\alpha}$ mit

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Es sei dann

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0\}.$$

Definition 1.14. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ heißen *Wurzeln* von \mathfrak{g} bezüglich \mathfrak{h} .

Lemma 1.15. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} , so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. \mathfrak{h} ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich für die Wurzeln $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Dies ist die *Wurzelraumzerlegung* von \mathfrak{g} bezüglich \mathfrak{h} . Die Räume \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Phi$ heißen *Wurzelräume*.

Proposition 1.16 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung). *Es sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. Φ erzeugt \mathfrak{h}^* als k -Vektorraum.
2. Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ eine k -Basis von \mathfrak{h}^* , so ist $\Phi \subseteq \text{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
3. Für alle $\alpha \in \Phi$ ist $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.
4. Die Wurzelräume \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Phi$ sind 1-dimensional.
5. Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ ist

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \\ \subseteq \mathfrak{h} & \text{falls } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

6. Es sei $\alpha \in \Phi$. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ ist eindimensional und $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$. Insbesondere gibt es ein eindeutiges $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$ und $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Ferner ist

$$S_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$

eine Lie-Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.4 Reduktive Lie-Algebren

Lemma 1.17. *Für eine Lie-Algebra \mathfrak{g} sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist halbeinfach.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ für ein abelsches Ideal \mathfrak{a} und ein halbeinfaches Ideal \mathfrak{s} .
3. Die adjungierte Darstellung von \mathfrak{g} ist halbeinfach.
4. $\text{rad } \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{s}$ für die Zerlegungen in 1 und 2.

Beweis. (4 \Rightarrow 3) $\text{ad } \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, da

$$\text{ad } \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\text{rad } \mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb \mathfrak{g} halbeinfach als $\text{ad } \mathfrak{g}$ -Modul

(3 \Rightarrow 2) Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Die \mathfrak{a}_i sind damit abelsch und die \mathfrak{s}_j einfach. Also ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.

(2 \Rightarrow 1) Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.

(1 \Rightarrow 4) Es ist $\text{rad } \mathfrak{g} = \text{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \text{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. \square

Definition 1.18. Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.17 erfüllt.

Beispiel 1.19. Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ sowie $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

Die oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{t}_n(k)$ sind für $n \geq 2$ nicht reduktiv, denn es ist $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \mathfrak{u}_n(k)$, aber $\mathfrak{t}_n(k) \not\supseteq kI \oplus \mathfrak{u}_n(k)$.

Lemma 1.20. *Es seien \mathfrak{g}_1 und \mathfrak{g}_2 zwei reduktive Lie-Algebren mit $\mathfrak{s}_1 := [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ und $\mathfrak{s}_2 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. Ist $\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\phi(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}_2$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{s}_1 = [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]$, da \mathfrak{s}_1 halbeinfach ist. Also ist

$$\phi(\mathfrak{s}_1) = \phi([\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]) = [\phi(\mathfrak{s}_1), \phi(\mathfrak{s}_1)] \subseteq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{s}_2. \quad \square$$

Bemerkung 1.21. Die analoge Aussage für die Zentren von \mathfrak{g}_1 und \mathfrak{g}_2 gilt im Allgemeinen nicht. Ist etwa $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_2(k)$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, so ist die Inklusion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(k)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, aber $Z(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \subsetneq kI = Z(\mathfrak{gl}_2(k))$.

Der Begriff einer Cartan-Unteralgebra verallgemeinert sich direkt auf reduktive Lie-Algebren.

Definition 1.22. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra \mathfrak{g} ist eine maximale torale Unter algebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ und die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind die *Wurzeln* von \mathfrak{g} bezüglich \mathfrak{h} .

Lemma 1.23. *Es sei \mathfrak{g} eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{CSA \text{ in } \mathfrak{g}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{CSA \text{ in } \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$: $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Unter algebra und da $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von \mathfrak{h} folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unter algebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unter algebra: $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf \mathfrak{a} und halbeinfach auf \mathfrak{s} und damit halbeinfach auf \mathfrak{g} . Also ist x halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra: Als Schnitt zweier Unteralgebren ist \mathfrak{h}' eine Unteralgebra von \mathfrak{g} und damit von \mathfrak{s} . Für $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ halbeinfach und \mathfrak{s} ist $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ -invariant, also ist auch $\text{ad}_{\mathfrak{h}'} x = \text{ad}_{\mathfrak{g}} x|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.
4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA: \mathfrak{h}' ist toral. Wäre \mathfrak{h}' keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die \mathfrak{h}' echt enthält. Dann wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die \mathfrak{h} echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von \mathfrak{h} .
5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA: Wäre \mathfrak{h} keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die \mathfrak{h} echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ ist

$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$

also $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von \mathfrak{h}' . \square

Korollar 1.24. *Es sei \mathfrak{g} eine reductive Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Dann ist \mathfrak{h} genau dann eine CSA, wenn \mathfrak{h} selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von \mathfrak{g} ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist \mathfrak{h} eine CSA von \mathfrak{g} so gibt es nach Lemma 1.23 eine CSA \mathfrak{h}' von \mathfrak{s} mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.15 ist $Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits \mathfrak{h} keine CSA, so gibt es eine CSA \mathfrak{h}' von \mathfrak{g} die \mathfrak{h} echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Also ist \mathfrak{h} nicht selbstzentralisierend. \square

Korollar 1.25. *Es sei \mathfrak{g} eine reductive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reductive Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Dann ist \mathfrak{h} eine CSA von \mathfrak{g}' .*

Beweis. Da \mathfrak{h} eine torale Unteralgebra von \mathfrak{g} ist, ist $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ für jedes $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach. Da \mathfrak{g}' eine Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ ist, ist \mathfrak{g}' invariant unter $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Also ist auch $\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass \mathfrak{h} eine torale Unteralgebra von \mathfrak{g}' ist.

Es ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da \mathfrak{h} eine CSA von \mathfrak{g} ist. Daher ist auch

$$Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{h},$$

also \mathfrak{h} nach Korollar 1.24 bereits eine CSA von \mathfrak{g}' . \square

Auch halbeinfache und nilpotente Element lassen sich auf reductive Lie-Algebren verallgemeinern.

Definition 1.26. Es sei \mathfrak{g} eine reductive Lie-Algebra. $x \in \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn x ad-halbeinfach ist. x heißt *nilpotent*, wenn $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und x ad-nilpotent ist.

Beispiel 1.27. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(k)$ ist ein Element $x \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn x eine halbeinfache, bzw. nilpotente Matrix ist:

Es sei $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach im Sinne von Definition 1.26 mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\mathfrak{sl}_n(k)$ invariant unter $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x_2$ ist, ist

$$\text{ad}_{\mathfrak{sl}_n(k)} x_2 = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{sl}_n(k)} = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{sl}_n(k)}$$

Also ist x_2 ein ad-halbeinfaches Element von $\mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\mathfrak{sl}_n(k)$ halbeinfach ist folgt, dass x_2 bereits eine halbeinfache Matrix ist. Da $x_1 \in kI$ ist auch x_1 eine halbeinfache Matrix. Da x_1 und x_2 zwei kommutierende halbeinfache Matrizen sind ist auch $x = x_1 + x_2$ eine halbeinfache Matrix.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent im Sinne von Definition 1.26, so ist $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}_n(k)$ und es folgt analog, dass x bereits eine nilpotente Matrix ist.

Bemerkung 1.28. In einer beliebigen linearen reductiven Lie-Algebra \mathfrak{g} sind halbeinfache, bzw. nilpotente Element (im Sinne von Definition 1.26) nicht notwendigerweise halbeinfach, bzw. nilpotent im Sinne der konkreten Jordanzerlegung.

So ist etwa

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in k \right\}$$

eine abelsche, und damit reductive, Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_2(k)$. Im Sinne von Definition 1.26 sind alle Elemente aus \mathfrak{g} halbeinfach, im Sinne der konkreten Jordanzerlegung ist allerdings 0 das einzige halbeinfache Element in \mathfrak{g} .

1.5 Innere Automorphismen

Es sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und $a: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein nilpotenten Endomorphismus von \mathfrak{g} . Dann ist

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von \mathfrak{g} . Ist $b: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von \mathfrak{g} , der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \text{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \text{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von \mathfrak{g} , d.h.

$$a([x, y]) = [a(x), y] + [x, a(y)] \quad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([x, y]) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} [a^\ell(x), a^{n-\ell}(y)] \quad \text{für all } x, y \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ ein Lie-Algebra-Automorphismus von \mathfrak{g} ist.

Insbesondere ist $\exp(\text{ad } x) \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $x \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.29. Es sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra. $\text{Int } \mathfrak{g} \subseteq \text{Aut } \mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von Automorphismen $\exp(\text{ad } x)$ mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent erzeugt wird. Die Elemente von $\text{Int } \mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen*.

Lemma 1.30. Es sei \mathfrak{g} eine lineare Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Dann ist

$$\exp(\text{ad } x)(y) = \exp(x)y \exp(x)^{-1} \quad \text{für alle } y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\text{ad } x = \lambda_x + \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x ist und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$. λ_x und ρ_{-x} sind nilpotent, da x nilpotent ist. Für alle $y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_x)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_x)^n}{n!}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) y = \lambda_{\exp(x)}(y).$$

Analog ergibt sich, dass

$$\exp(\rho(-x)) = \rho_{\exp(-x)} = \rho_{\exp(x)^{-1}}.$$

Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist daher für alle $y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\text{ad } x)(y) = \exp(\lambda_x + \rho_{-x})(y) = \lambda_{\exp(x)} \rho_{\exp(x)^{-1}}(y) = \exp(x)y \exp(x)^{-1}.$$

□

Beispiel 1.31. Es sei $B \in M_n(k)$. Ist $x \in \mathfrak{g}_B \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ nilpotent, so ist $\exp(x) \in G_B$. Also ist jedes $\sigma \in \text{Int } \mathfrak{g}$ durch Konjugation mit passenden $S \in G_B$ gegeben.

Lemma 1.32. Es sei \mathfrak{g} reduktiv und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann ist \mathfrak{s} invariant unter $\text{Int } \mathfrak{g}$ und

$$\begin{aligned} \text{Int } \mathfrak{g} &\cong \text{Int } \mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \text{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\leftarrow \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\text{ad}_{Z(\mathfrak{g})} x_1) \oplus (\text{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = 0 \oplus \text{ad}_{\mathfrak{s}} x_2.$$

Somit ist x genau dann ad-nilpotent in \mathfrak{g} , wenn x_2 ad-nilpotent in \mathfrak{s} ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}} x) = \exp(0 \oplus \text{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = \text{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\text{ad}_{\mathfrak{s}} x_2).$$

Damit ist

$$\text{Int } \mathfrak{s} = \langle \exp(\text{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle$$

und

$$\text{Int } \mathfrak{g} = \langle \text{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\text{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Lemma 1.33. *Ist \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von \mathfrak{g} konjugiert unter $\text{Int } \mathfrak{g}$, d.h. für zwei CSA $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es $\sigma \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Korollar 1.34. *Ist \mathfrak{g} eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von \mathfrak{g} konjugiert unter $\text{Int } \mathfrak{g}$.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.23 gibt es zwei CSA $\mathfrak{h}'_1, \mathfrak{h}'_2 \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_1$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_2$. Nach Lemma 1.33 gibt es $\tau \in \text{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{h}'_2$. Nach Lemma 1.32 ist $\sigma := \text{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\text{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_1) = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_2 = \mathfrak{h}_2. \quad \square$$

Lemma 1.35. *Es sei $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ ein reduktive Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Dann lässt sich jeder innere Automorphismus von \mathfrak{g}' zu einem inneren Automorphismus von \mathfrak{g} fortsetzen.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x)$ für $\text{ad}_{\mathfrak{g}'}$ -nilpotentes $x \in \mathfrak{g}'$ zu zeigen. Es sei $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Da $\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \text{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2$ ist auch $\text{ad}_{\mathfrak{s}'} x_2 = (\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2)|_{\mathfrak{s}'}$ nilpotent. Also ist x_2 ein nilpotentes Element der halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{s}' mit $\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \text{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2$.

Mit der Inklusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ folgt aus Lemma 1.20, dass $x_2 \in \mathfrak{s}$. Aus der Funktorialität der Jordanzerlegung ergibt sich außerdem, dass x_2 bereits ein nilpotentes Element von \mathfrak{s} ist.

Also ist $\text{ad}_{\mathfrak{s}} x_2$ nilpotent und damit auch $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x_2 = 0 \oplus \text{ad}_{\mathfrak{s}}(x_2)$. Damit ist $\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}} x_2) \in \text{Int } \mathfrak{g}$, und da

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \text{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2 = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

ist

$$\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}'} x) = \exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}. \quad \square$$

Kapitel 2

Halbeinfache Orbiten

2.1 Motivation $\mathfrak{gl}_n(k)$

Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei

$$\mathcal{O}_X := \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$

der *Orbit* von X . Ein Orbit \mathcal{O} heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ für ein halbeinfaches $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$.

Lemma 2.1. *Ist $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ halbeinfach, so ist \mathfrak{g}^X reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit

$$SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r), \quad (1)$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und λ_i kommt mit Vielfachheit n_i vor. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ der X auf SXS^{-1} abbildet und damit auch \mathfrak{g}^X auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt also die Aussage für Diagonalmatrix der Form (1) zu zeigen.

Es sei also

$$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \quad (2)$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und λ_i komme mit Vielfachheit $n_i \geq 1$ auf. Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i, j) -te Eintrag von AX ist $\mu_j a_{ij}$ und der (i, j) -te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Also ist genau dann $A \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\mu_i = \mu_j$ oder $a_{ij} = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Aus (2) ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{array} \right) \middle| A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \dots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \dots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k)$$

reduktiv. □

Korollar 2.2. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Dann ist \mathfrak{g}^X die Unteralgebra der Diagonalmatrizen.*

Lemma 2.3. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. X' ist halbeinfach, da \mathcal{O} ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Da alle CSA von \mathfrak{g} unter $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert sind gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesondere ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}. \quad \square$$

Theorem 2.4. *Ist $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Für*

$$W := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$$

ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/W \rightarrow \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Da \mathfrak{h} eine CSA von \mathfrak{g} ist besteht \mathfrak{g} aus halbeinfachen Elementen. Deshalb ist \mathcal{O}_X für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi}: \mathfrak{h} \rightarrow \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.3 ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \rightarrow \{\mathcal{O}_X \mid X \in \mathfrak{gl}_n(k) \text{ ist halbeinfach}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Da $\tilde{\varphi}$ über φ faktorisiert ist auch φ surjektiv.

Für die Injektivität von φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $SX_2S^{-1} = X_1$. Dann sind $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von \mathfrak{g} die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.1 ist \mathfrak{g}^{X_1} reduktiv. Nach Korollar 1.25 sind \mathfrak{h} und $S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von \mathfrak{g}^{X_1} . Nach Korollar 1.34 gibt es $\sigma \in \mathrm{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h}$.

Ist $y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ nilpotent, so ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} y)(X) = 0$, also

$$\exp(y)X_1 \exp(y)^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} y)(X_1) = X_1.$$

und somit $\exp(y) \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$. Daher ist jedes Element aus $\mathrm{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ durch Konjugation mit einem Element aus $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben. Insbesondere ist σ durch Konjugation mit passenden $T \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(TS)\mathfrak{h}(TS)^{-1} = TS\mathfrak{h}S^{-1}T^{-1} = \sigma(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h},$$

also $TS \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$, mit

$$(TS)X_2(TS)^{-1} = TSX_2S^{-1}T^{-1} = TX_1T^{-1} = X_1.$$

Somit sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert. \square

Lemma 2.5. *Es bestehe $T \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ aus Diagonalmatrizen und es gebe $X \in T$ mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S.T = T\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es sei $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Für $S = (s_{ij}) \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ ist dann $SXS^{-1} \in T$ eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Es ist dann

$$SX = X \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Der (i, j) -te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i, j) -te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \dots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij} (\mu_i s_{ij'}) = s_{ij} (\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij} s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag der nicht 0 ist. Da S invertierbar ist, ist in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag verschieden von 0. Also ist in jeder Zeile von S genau eine Zeile nicht Null.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ gibt es andererseits auch $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in T$ mit

$$XS = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)X.$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der nicht 0 ist. \square

Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die CSA der Diagonalmatrizen. \mathfrak{h} enthält eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen.

Nach Lemma 2.5 besteht $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ daher aus Monomialmatrizen. Andererseits wird \mathfrak{h} von jeder Monomialmatrix aus $\mathrm{GL}_n(k)$ normalisiert. Also ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)}$ die Untergruppe der invertierbaren Monomialmatrizen.

Außerdem besteht $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ nach Korollar 2.2 aus Diagonalmatrizen, und jede Diagonalmatrix aus $\mathrm{GL}_n(k)$ zentralisiert \mathfrak{h} . Also ist $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen.

Also ist

$$W := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)} \cong S_n$$

und die Wirkung von W auf \mathfrak{h} entspricht der Permutation der Diagonaleinträge durch S_n . Durch die zusätzliche Identifikation

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ergibt sich, dass die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ klassifiziert sind durch

$$k^n/S_n \xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k) \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\},$$

$$[(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] \mapsto \mathcal{O}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)},$$

wobei S_n auf k^n durch Permutation der Einträge wirkt.

2.2 Der allgemeine Fall

In diesem Abschnitt sei \mathfrak{g} eine reductive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf \mathfrak{g} wirkt. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathcal{O}_X := \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

der Orbit von X unter G . Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn \mathcal{O} aus halbeinfachen Elementen besteht. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\text{ad } \phi(X) = \phi(\text{ad } X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } \phi \in \text{Aut } \mathfrak{g}.$$

Daher ist X genau dann halbeinfach wenn \mathcal{O}_X ein halbeinfacher Orbit ist.

In diesem Abschnitt klassifizieren wir die halbeinfachen Orbits in \mathfrak{g} . Dabei arbeiten unter der zusätzlichen Annahme, dass es für jedes $\sigma \in \text{Int } \mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, dass durch σ auf \mathfrak{g} wirkt. Darunter fallen die folgenden Beispiele:

Beispiel 2.6. 1. $\text{GL}_n(k)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und nach Lemma 1.30 ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\text{GL}_n(k)$ gegeben.

2. Es sei $B \in \text{M}_n(k)$, so dass \mathfrak{g}_B reaktiv ist. Dann wirkt G_B durch Konjugation auf \mathfrak{g}_B , und durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass für nilpotentes $x \in \mathfrak{g}_B$ auch $\exp(x) \in G_B$. Also ist nach Lemma 1.30 jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus G_B gegeben. Hieraus ergeben sich mehrere konkrete Beispiele:

- (a) Für $B = 0$ erneut die Konjugationswirkung von $\text{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$
- (b) Für $I \in \text{M}_n(k)$ ergibt sich die Konjugationswirkung der orthogonalen Gruppe

$$O_n(k) := \{S \in \text{GL}_n(k) \mid S^T = S^{-1}\}$$

auf den schiefsymmetrischen Matrizen

$$\mathfrak{so}_n(k) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T = -A\}.$$

- (c) Für

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_{2n}(k)$$

ergibt sich die Konjugationsgruppe der symplektischen Gruppe

$$\text{Sp}_{2n}(k) := \{S \in \text{GL}_{2n}(k) \mid S^T \Omega S = \Omega\}$$

auf der symplektischen Lie-Algebra

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) := \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T \Omega + \Omega A = 0\}$$

3. Für eine beliebige reductive Lie-Algebra \mathfrak{g} wirkt $\text{Aut } \mathfrak{g}$ auf natürliche Weise auf \mathfrak{g} und jeder innere Automorphismus von \mathfrak{g} ist insbesondere ein Automorphismus von \mathfrak{g} .

Ist $X \in \text{M}_n(k)$ nilpotent, so ist $\det \exp(X) = 1$. Da X nilpotent ist gibt es $S \in \text{GL}_n(k)$, so dass SXS^{-1} eine echte obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist auch

2. HALBEINFACHE ORBITEN

$\sum_{m=1}^{\infty} (SXS^{-1})^m/m!$ eine echte obere Dreiecksmatrix und somit $\exp(SXS^{-1})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Damit ist

$$1 = \det(\exp(SXS^{-1})) = \det(S \exp(X) S^{-1}) = \det(\exp(X)).$$

Damit ergeben sich weitere Beispiele:

4. (a) Ist $B \in M_n(k)$ mit \mathfrak{g}_B reduktiv, so ist jeder innere Automorphismus von \mathfrak{g}_B bereits durch Konjugation mit einem Element aus

$$SG_B := \{S \in G_B \mid \det(S) = 1\}$$

gegeben. Insbesondere ergibt sich für $B = I$ die Konjugationswirkung von

$$SO_n(k) := \{S \in O_n(k) \mid \det S = 1\}$$

auf $\mathfrak{so}_n(k)$.

- (b) Ist \mathfrak{g} reduktiv, so ist für nilpotentes $X \in \mathfrak{g}$ bereits $\exp(\text{ad } X) \in \text{SL}(\mathfrak{g})$ und somit

$$\text{Int } \mathfrak{g} \subseteq \{\phi \in \text{Aut } \mathfrak{g} \mid \det \phi = 1\}.$$

Proposition 2.7. *Es sei \mathfrak{g} eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA die X enthält. Es seien $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*

$$\Phi_X := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha$$

und \mathfrak{g}^X ist reduktiv.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

die Wurzelraumzerlegung von \mathfrak{g} bezüglich \mathfrak{h} . Für $Y \in \mathfrak{g}$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} Y_\alpha$ bezüglich (3) ist

$$[X, Y] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(X) Y_\alpha.$$

Wegen der Direktheit der Zerlegung (3) folgt, dass genau dann $Y \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\alpha(X) Y_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Also ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{4}$$

Für $Z(\mathfrak{g}^X)$ ergibt sich, dass

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha. \tag{5}$$

Denn es ist

$$Z(\mathfrak{g}^X) = Z_{\mathfrak{g}^X}(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$

und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist

$$[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \alpha(Y) \mathfrak{g}_\alpha,$$

also $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von \mathfrak{g}^X gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \text{rad } \mathfrak{g}^X$. Da $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\text{rad } \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$, da $\text{rad } \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Es ist also

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X,$$

aber $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ ist nicht auflösbar. \square

Als erste Annäherung ergibt sich, dass $\text{rad } \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$: Andernfalls gebe es $Y \in \text{rad } \mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und

$$\Psi := \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Da $\text{rad } \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist für alle $h \in \mathfrak{h}$ und $\ell \geq 1$ auch

$$\text{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \text{rad } \mathfrak{g}^X.$$

Behauptung 2. Es gibt $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(h) \neq \beta(h)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des natürlichen Isomorphismus $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^{**}$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \text{span}_k \Phi$ gibt es eine k -Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ von \mathfrak{h}^* . k ist algebraisch abgeschlossen und somit unendlichdimensional über \mathbb{Q} . Also gibt es $z_1, \dots, z_n \in k$ die linear unabhängig über \mathbb{Q} sind. Es sei $\varphi: \mathfrak{h}^* \rightarrow k$ die k -lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\text{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \text{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. \square

Es sei $h \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2. Für $\ell = 1, \dots, n$ sei

$$Z_\ell := \text{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \text{rad } \mathfrak{g}^X.$$

Es sei $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Da die Wurzelräume \mathfrak{g}_α eindimensional sind ist $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Psi}$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $\{Z_i\}_{i=1}^n$ eine

Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0. \end{aligned}$$

Da $Z_1, \dots, Z_n \in \text{rad } \mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da $\Psi \neq 0$ gibt damit $\alpha \in \Psi \subseteq \Phi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X$, im Widerspruch zu Behauptung 1. Also ist $\text{rad } \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \text{rad } \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (5) ein $\alpha \in \mathfrak{g}^X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Da $\text{rad } \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist damit

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \text{rad } \mathfrak{g}^X,$$

im Widerspruch zu Behauptung 1. Insgesamt zeigt dies, dass $\text{rad } \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. \square

Korollar 2.8. *Es sei \mathfrak{g} eine reduktive Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist \mathfrak{g}^X reduktiv.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Annahme ist $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X = \text{ad}_{\mathfrak{g}} X_2$ halbeinfach und \mathfrak{s} ist invariant unter $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X_2$, also ist auch $\text{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\text{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach und somit X_2 ein halbeinfaches Element der halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{s} . Damit ist \mathfrak{s}^{X_2} nach Proposition 2.7 reduktiv und somit auch

$$\mathfrak{g}^X = Z(\mathfrak{g})^{X_1} \oplus \mathfrak{s}^{X_2} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}^{X_2},$$

da $Z(\mathfrak{g})$ abelsch ist. \square

Lemma 2.9. *Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Dann gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Beweis. Nach Korollar 1.34 gibt es $\sigma \in \text{Int } \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ und nach Annahme gibt es $s \in G$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = s \cdot \mathfrak{h}_1$. \square

Korollar 2.10. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. Dann ist X' halbeinfach und in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Nach Lemma 2.9 gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Dann ist $X := s \cdot X' \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$. \square

Theorem 2.11. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und*

$$W := N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}).$$

Dann ist die Abbildung

$$\Phi: \mathfrak{h}/W \rightarrow \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Da \mathfrak{h} aus halbeinfachen Elementen besteht und $\mathcal{O}_{s \cdot X} = \mathcal{O}_X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $s \in G$ ist Φ wohldefiniert. Nach Korollar 2.10 ist Φ surjektiv.

Es seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$. Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass X_1 und X_2 unter G konjugiert sind. Da $X_1 \in \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $s \in G$ mit $s \cdot X_2 = X_1$. \mathfrak{h} und $s \cdot \mathfrak{h}$ sind zwei CSA von \mathfrak{g} , die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind ist bereits $\mathfrak{h}, s \cdot \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$, wobei \mathfrak{g}^{X_1} nach Proposition 2.7 reduktiv ist. Nach Korollar 1.25 sind \mathfrak{h} und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von \mathfrak{g}^{X_1} .

Nach Korollar 1.34 gibt es $\sigma \in \text{Int } \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Behauptung. Es ist $\sigma(X_1) = X_1$.

Beweis. Für $\text{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}$ -nilpotentes $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ ist $(\text{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = 0$ und somit

$$\exp(\text{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\text{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)^n}{n!}(X_1) = X_1. \quad \square$$

Nach Lemma 1.35 lässt sich σ zu einem inneren Automorphismus $\tau \in \text{Int } \mathfrak{g}$ fortsetzen. Nach Annahme gibt es $t \in G$, so dass t durch τ auf \mathfrak{g} wirkt. Zum einen ist

$$t \cdot s \cdot \mathfrak{h} = \tau(s \cdot \mathfrak{h}) = \sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},$$

also $t \cdot s \in N_G(\mathfrak{h})$. Zum anderen ist $X_1 \in \mathfrak{g}^{X_1}$ und somit

$$t \cdot s \cdot X_2 = t \cdot X_1 = \tau(X_1) = \sigma(X_1) = X_1. \quad \square$$

2.3 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die halbeinfachen Orbits in $\mathfrak{so}_{2n}k$ unter der Konjugationswirkung von $O_{2n}(k)$ bestimmen. Nach Theorem 2.11 genügt es hierfür eine CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{so}_{2n}(k)$ zu finden und den Quotienten $N_{O_{2n}(k)}/Z_{O_{2n}(k)}$ zu berechnen.

2.3.1 Alternative Definition

Wir nicht direkt mit $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ sondern mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_J = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T J + J A = 0\},$$

und den entsprechenden Gruppen

$$G := G_J = \{S \in \text{GL}_{2n}(k) \mid S^T J S = J\}$$

und

$$SG := \{S \in G \mid \det S = 1\},$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \text{M}_{2n}(k).$$

\mathfrak{g} ist isomorph zu $\mathfrak{so}_{2n}(k)$. Per Definition ist $\mathfrak{so}_{2n}(k) = \mathfrak{g}_I$ für die Einheitsmatrix $I \in \text{M}_{2n}(k)$. I und J beschreiben die gleiche Bilinearform bezüglich zweier

2. HALBEINFACHE ORBITEN

Basen. Bezüglich der Standardbasis e_1, \dots, e_{2n} von k^{2n} beschreibt I die Standardbilinearform auf k^{2n} . Bezüglich der Basis e'_1, \dots, e'_{2n} von k^{2n} mit

$$\begin{aligned} e'_1 &:= \frac{e_1 + ie_{2n}}{\sqrt{2}}, & e'_{2n} &:= \frac{e_1 - ie_{2n}}{\sqrt{2}}, \\ e'_2 &:= \frac{e_2 + ie_{2n-1}}{\sqrt{2}}, & e'_{2n-1} &:= \frac{e_2 - ie_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \\ &\vdots & &\vdots \\ e'_n &:= \frac{e_n + ie_{n+1}}{\sqrt{2}}, & e'_{n+1} &:= \frac{e_n - ie_{n+1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

wird die Standardbilinearform von J beschrieben. Insbesondere induziert die entsprechende Basiswechselmatrix

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & i & & & & -i \\ & & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \\ i & & & & & & & -i \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\Phi: \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_J \rightarrow \mathfrak{g}_I = \mathfrak{so}_{2n}(k), A \mapsto \Omega A \Omega^{-1}.$$

und Isomorphismen von Gruppen

$$\varphi: G = G_J \rightarrow G_I = O_{2n}(k), S \mapsto \Omega S \Omega^{-1},$$

der sich zu einem Isomorphismus von Gruppen $SG \cong SO_{2n}(k)$ einschränkt. Φ und φ sind mit der jeweiligen Gruppenwirkung durch Konjugation verträglich, da für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $S \in G$

$$\varphi(S) \cdot \Phi(X) = \Phi(S \cdot X).$$

Also ist für alle $X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{O}_X) &= \{\Phi(A) \mid A \in \mathcal{O}_X\} = \{\Phi(S \cdot X) \mid S \in G\} \\ &= \{\varphi(S) \cdot \Phi(X) \mid S \in G\} = \{S \cdot \Phi(X) \mid S \in O_{2n}(k)\} \\ &= \mathcal{O}_{\Phi(X)}. \end{aligned}$$

Die Klassifikation halbeinfacher Orbiten in \mathfrak{g} unter G und SG ist also äquivalent zu der Klassifikation halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$ und $SO_{2n}(k)$.

Ähnlich wie sich $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $O_{2n}(k)$ durch das Transponierte ergeben lassen sich auch \mathfrak{g} und G beschreiben:

Definition 2.12. Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(k)$. Die *Anti-Transponierte* von A ist

$$A^S := (a_{n+1-j, n+1-i})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

A^S ist das Transponierte von A an der Anti-Diagonalen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^S = \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Die Anti-Transponierte kann auch über die Transponierte beschrieben werden.

Lemma 2.13. Für alle $A \in M_n(k)$ ist

$$A^S = JA^T J,$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in M_n(k).$$

Beweis. Es ist

$$JA^T J = J(a_{ij})_{ij}^T J = J(a_{ji})_{ij} J = J(a_{j,n+1-i})_{ij} = (a_{n+1-j,n+1-i})_{ij} = A^S.$$

□

Da $J^2 = I$ ist ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^S = -A\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,2n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -a_{1,2n-1} \\ a_{2n-1,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{2n-1,1} & \cdots & -a_{11} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in k \text{ für alle } i+j \leq 2n \right\}$$

und

$$G = \{S \in \text{GL}_{2n}(k) \mid S^{-1} = S^S\}.$$

Wir halten noch die folgenden Rechenregel für das Anti-Transponierte fest:

Lemma 2.14. 1. Für $A, B \in M_n(k)$ ist $(AB)^S = B^S A^S$.

2. Ist $P \in M_n(k)$ eine Permutationsmatrix, so auch P^S .

3. Ist $D \in M_n(k)$ eine Diagonalmatrix, so auch D^S .

Beweis. Die Aussagen ergeben sich direkt daraus, dass $A^S = JA^T J$ für alle $A \in M_n(k)$. □

2.3.2 Cartan-Unteralgebra

Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, also

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

Da die Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ eine CSA von $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$ bilden ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{d}_{2n}(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$. Da $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)} \mathfrak{h}$ somit aus halbeinfachen Endomorphismen besteht und \mathfrak{g} invariant unter $\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)} \mathfrak{h}$ ist, folgt, dass auch

$$\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \{\text{ad}_{\mathfrak{g}} X \mid X \in \mathfrak{h}\} = \{(\text{ad}_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)} X)|_{\mathfrak{g}} \mid X \in \mathfrak{h}\}$$

aus halbeinfachen Endomorphismen besteht. Also ist \mathfrak{h} eine torale Unteralgebra von \mathfrak{g} . Da \mathfrak{h} eine Diagonalmatrix X mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält ist nach Korollar 2.2

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g} \subseteq Z_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)}(X) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{d}_{2n}(k) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}.$$

Also ist \mathfrak{h} selbstzentralisierend und damit nach Korollar 1.24 eine CSA von \mathfrak{g} .

2.3.3 Normalisator und Zentralisator

Zur Berechnung von $N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h})$ bestimmen wir zunächst $N_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ und $Z_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ unter der Konjugationswirkung von $\text{GL}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$, da

$$N_G(\mathfrak{h}) = N_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \quad \text{und} \quad Z_G(\mathfrak{h}) = Z_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G.$$

Da \mathfrak{h} eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält ist $Z_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) = \text{D}_{2n}(k)$ nach Korollar 2.2. Somit ist

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \text{D}_{2n}(k) \cap G.$$

Da \mathfrak{h} eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält besteht $N_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ nach Lemma 2.5 aus Monomialmatrizen. Somit besteht $N_G(\mathfrak{h})$ aus Monomialmatrizen.

Es sei $N_D := N_G(\mathfrak{h}) \cap \text{D}_{2n}(k)$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen und $N_P := N_G(\mathfrak{h}) \cap \text{P}_{2n}(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Wir wissen bereits, dass $N_D = Z_G(\mathfrak{h}) = \text{D}_{2n}(k) \cap G$.

Behauptung 1. Es ist bereits $N_G(\mathfrak{h}) = N_D N_P = \{DP \mid D \in N_D, P \in N_P\}$.

Beweis. Es sei $M \in N_G(\mathfrak{h})$. Da M eine Monomialmatrix ist gibt es eine eindeutige Diagonalmatrix $D \in \text{D}_{2n}(k)$ und eine eindeutige Permutationsmatrix $P \in \text{P}_{2n}(k)$ mit $M = DP$. Es gilt zu zeigen, dass $D \in N_D$ und $P \in N_P$.

Da $M \in G$ ist $MM^S = I$ und somit

$$I = MM^S = DP(DP)^S = DPP^S D^S$$

ist

$$PP^S = D^{-1}(D^S)^{-1} = (D^S D)^{-1}.$$

Da PP^S eine Permutationsmatrix und $(D^S D)^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, folgt, dass bereits

$$PP^S = I = DD^S.$$

Also ist $D \in G$ und somit $D \in \text{D}_{2n}(k) \cap G = N_D$. Insbesondere ist $D \in N_G(\mathfrak{h})$, somit auch $P = D^{-1}M \in N_G(\mathfrak{h})$ und damit $P \in N_G(\mathfrak{h}) \cap \text{P}_{2n}(k) = N_P$. \square

Es ist $D_{2n}(k) \cap P_{2n}(k) = 1$ und $D_{2n}(k)$ ist normal in $\text{Mon}_{2n}(k)$. Deshalb ist auch $N_D \cap N_P = 1$ und $N_D = D_{2n}(k) \cap N_G(\mathfrak{h})$ ist normal in $N_G(\mathfrak{h}) = \text{Mon}_{2n}(k) \cap N_G(\mathfrak{h})$ mit $N_G(\mathfrak{h}) = N_D N_P$. Also ist $N_G(\mathfrak{h}) = N_D \rtimes N_P$.

Da $N_G(\mathfrak{h}) = N_D \rtimes N_P$ und $Z_G(\mathfrak{h}) = D_{2n}(k) \cap G = N_D$ ist

$$W := N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = (N_D \rtimes N_P)/N_D \cong N_P$$

und die Wirkung von W auf \mathfrak{h} entspricht der Konjugationswirkung von N_P . Zur Bestimmung von

$$N_P = N_G(\mathfrak{h}) \cap P_{2n}(k) = N_{\text{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \cap P_{2n}(k) = N_{P_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G$$

berechnen wir zunächst $N_{P_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ unter der Konjugations von $P_{2n}(k)$ auf \mathfrak{g} und untersuchen dann, welche $P \in N_{P_{2n}(k)}$ die Bedingung $P^{-1} = P^S$ erfüllen. Da \mathfrak{h} eine Unteralgebra von $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ ist können wir für die Berechnung von $N_{P_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ auch die Konjugationwirkung von $P_{2n}(k)$ auf den $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ betrachten.

Es sei $S_{2n} \cong P_{2n}(k)$, $\pi \mapsto A_\pi$ der eindeutige Gruppenisomorphismus mit

$$A_\pi e_i = A e_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 2n,$$

wobei e_1, \dots, e_{2n} die Standardbasis von k^{2n} ist. Die Konjugationswirkung von $P_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ entspricht unter diesem Isomorphismus einer Wirkung von S_{2n} auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$. Da für alle $i = 1, \dots, 2n$ und $\pi \in S_{2n}$

$$A_\pi \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) A_\pi^{-1} e_i = \lambda_{\pi^{-1}(i)} e_i$$

ist die entsprechende Wirkung von S_{2n} auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ durch

$$\pi \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) = \text{diag}(\lambda_{\pi^{-1}(1)}, \dots, \lambda_{\pi^{-1}(2n)}).$$

gegeben. Unter dem Isomorphismus $P_{2n}(k) \cong S_{2n}$ korrespondiert $N_{P_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ damit zu $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Zur Bestimmung von $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ betrachten wir zwei spezielle Arten von Permutationen: Für $\pi \in S_n$ sei $\tau_\pi \in S_{2n}$ definiert als

$$\tau_\pi(i) := \pi(i) \quad \text{und} \quad \tau_\pi(2n+1-i) := 2n+1-\pi(i) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Behauptung 2. 1. Die Abbildung $S_n \rightarrow S_{2n}$, $\pi \mapsto \tau_\pi$ ein Gruppenhomomorphismus und injektiv.

2. Es sei $\pi \in S_n$ und

$$X = (a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \in \mathfrak{h}.$$

Dann ist

$$\tau_\pi \cdot X = \text{diag}(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \dots, -a_{\pi^{-1}(1)}).$$

Insbesondere ist $\tau_\pi \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Beweis. 1. Für $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ ist für alle $i = 1, \dots, n$

$$\tau_{\pi_1} \tau_{\pi_2}(i) = \tau_{\pi_1}(\pi_2(i)) = \pi_1(\pi_2(i)) = \tau_{\pi_1 \pi_2}(i)$$

sowie

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_1}\tau_{\pi_2}(2n+1-i) &= \tau_{\pi_1}(2n+1-\pi_2(i)) \\ &= 2n+1-\pi_1\pi_2(i) = \tau_{\pi_1\pi_2}(2n+1-i).\end{aligned}$$

Sind $\pi, \pi' \in S_n$ mit $\tau_\pi = \tau_{\pi'}$ so ist für alle $i = 1, \dots, n$

$$\pi(i) = \tau_\pi(i) = \tau_{\pi'}(i) = \pi'(i)$$

und somit $\pi = \pi'$.

2. Es ist

$$X = \text{diag}(a_1, \dots, a_{2n}) \quad \text{mit} \quad a_{2n+1-i} = -a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Da $\tau_\pi^{-1} = \tau_{\pi^{-1}}$ ist somit

$$\begin{aligned}\tau_\pi \cdot X &= \text{diag}\left(a_{\tau_\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\tau_\pi^{-1}(2n)}\right) \\ &= \text{diag}\left(a_{\tau_{\pi^{-1}}(1)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(n)}, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-n)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-1)}\right) \\ &= \text{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, a_{2n+1-\pi^{-1}(n)}, \dots, a_{2n+1-\pi^{-1}(1)}\right) \\ &= \text{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \dots, -a_{\pi^{-1}(1)}\right) \in \mathfrak{h}.\end{aligned} \quad \square$$

Für alle $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n$ sei $\sigma_\varepsilon \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ definiert als

$$\sigma_\varepsilon(i) := \begin{cases} i & \text{falls } \varepsilon_i = 1 \\ 2n+1-i & \text{falls } \varepsilon_i = -1 \end{cases} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Behauptung 3. 1. Es sei $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ und

$$X = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1)$$

Dann ist

$$\sigma_\varepsilon \cdot X = \text{diag}(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n, -\varepsilon_n a_n, \dots, -\varepsilon_1 a_1).$$

Insbesondere ist $\sigma_\varepsilon \cdot X \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Behauptung 4. Jedes $\omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ ist von der Form $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$ für passende $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ und $\pi \in S_n$.

Beweis. Es sei

$$X := \text{diag}(1, \dots, n, -n, \dots, -1) \in \mathfrak{h}.$$

Da die Einträge von X paarweise verschieden sind wirkt S_{2n} treu auf dem Orbit $\mathcal{O} := S_{2n} \cdot X$, also auch $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$. Es sei

$$\omega \cdot X = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, a_1).$$

Für $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ mit

$$\varepsilon_i := \text{sgn } a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

ist auch $\omega' := \sigma_\varepsilon \omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$. Per Konstruktion permutiert ω' die positiven Diagonaleinträge von X und da $\omega' \cdot X \in \mathfrak{h}$ ist ω' durch diese Permutation der positiven Diagonaleinträge bereits eindeutig bestimmt. Für $\pi \in S_n$ mit

$$\pi(i) = \varepsilon_i a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

ist deshalb $\omega' = \tau_\pi$. Da $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ ist damit $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$. □