Halbeinfache und Nilpotente Orbiten

Jendrik Stelzner

23. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbereitung

Im Folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} k = 0$. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren und Vektorräume über dem Grundkörper k. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren endlichdimensional.

1.1 Notationen und Grundlagen

$\mathrm{M}_n(k)$ ist der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über k. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ ist

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

$\mathrm{D}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ bezeichnet die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Eine *Monomialmatrix*, bzw. *verallgemeinerte Permutationsmatrix* ist eine Matrix $S \in \mathrm{M}_n(k)$, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. Monomialmatrizen sind invertierbar und bilden eine Untergruppe $\mathrm{Mon}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$. Es sind $\mathrm{D}_n(k), \mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$ mit $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$, wobei $\rtimes$ das innere semidirekte Produkt mit Normalteiler auf der linken Seite bezeichnet.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet die allgemeine lineare Lie-Algebra von Dimension n^2 und $\mathfrak{sl}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die spezielle lineare Lie-Algebra. Es bezeichnet $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{u}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der echten oberen Dreiecksmatrizen.

Für einen Vektorraum V sei $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der k-linearen Automorphismen von V und $\mathrm{SL}(V) = \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det \phi = 1\}$. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ die Gruppe der Lie-Algebra-Automorphismen von $\mathfrak{g}$. Das *Zentrum* von $\mathfrak{g}$ ist

$$Z(\mathfrak{g}) \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

und für zwei Teilmengen $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$[I, J] \coloneqq \operatorname{span}_k\{[X, Y] \mid X \in I, Y \in J\}.$$

Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $X \subseteq \mathfrak{g}$, so ist

$$Z_{\mathfrak{g}}(X) \coloneqq \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \text{ für alle } x \in X\}$$

der *Zentralisator* von X in $\mathfrak{g}$, und für ein Element $x \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathfrak{g}^X \coloneqq Z_{\mathfrak{g}}(X) \coloneqq Z_{\mathfrak{g}}(\{X\}) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}.$$

der *Zentralisator* von X in $\mathfrak{g}$.

$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ bezeichnet das *Radikal von* $\mathfrak{g}$, d.i. das eindeutige maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = 0$. $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ für einfache Ideale $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Für $B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist

$$G_B \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T B S = B\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$,

$$\mathfrak{g}_B \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T B + BA = 0\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und G_B wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_B$.

Ist V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} \coloneqq (v_1, \ldots, v_n)$, so beschreibt B bezüglich $\mathcal{B}$ eine Bilinearform β auf V. Unter dem durch $\mathcal{B}$ induzierten Isomorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{gl}(V)$ entspricht $\mathfrak{g}_B$ entspricht der Lie-Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_\beta \coloneqq \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \beta(f(v), w) + \beta(v, f(w)) = 0 \text{ für alle } v, w \in V\}$$

und unter dem induzierten Isomorphismus von $\mathrm{GL}_n(k)$ und $\mathrm{GL}(V)$ entspricht G_B der Isometriegruppe

$$G_\beta \coloneqq \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Ist $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V, so wird β bezüglich $\mathcal{C}$ durch eine Matrix $C \in \mathrm{M}_n(k)$ beschrieben. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ induziert einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C$ und einen Isomorphismus von Gruppen $G_B \cong G_C$: Ist $\Omega \in \mathrm{M}_n(k)$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ (d.h. die i-te Spalte von Ω sind die Koordinaten von v_i bezüglich $\mathcal{C}$), so ist $B = \Omega^T C \Omega$ und somit

$$\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C, A \mapsto \Omega A \Omega^{-1} \quad \text{und} \quad G_B \cong G_C, S \mapsto \Omega S \Omega^{-1}.$$

1.2 Jordanzerlegung

In diesem Abschnitt erinnern wir an die grundlegende Theorie der Jordanzerlegung von Endomorphismen und der Jordanzerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren.

Definition 1.1. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $x \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.2. $x \in \mathrm{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder x-invariante Untervektorraum ein x-invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $x \in \operatorname{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $x_s \in \operatorname{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $x_n \in \operatorname{End}_k(V)$.

Proposition 1.3 (Konkrete Jordanzerlegung)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $x \in \operatorname{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige $x_s, x_n \in \operatorname{End}_k(V)$, so dass*
   (a) $x = x_s + x_n$,
   (b) *x_s ist halbeinfach und x_n nilpotent,*
   (c) *x_s und x_n kommutieren.*
2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, so dass $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. Insbesondere kommutiert ein Endomorphismus genau dann mit x wenn er mit x_s und x_n kommutiert.*
3. *Für Untervektorräume $U \subseteq W \subseteq V$ mit $x(W) \subseteq U$ ist auch $x_s(W) \subseteq U$ und $x_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.4. Ist $x \in \operatorname{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Proposition 1.3 die *konkrete Jordanzerlegung* von x. x_s ist der *halbeinfache Teil* von x und x_n der *nilpotente Teil* von x.

Wir wollen das Konzept eines halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementes auf Lie-Algebren verallgemeinern, wobei wir uns zunächst auf halbeinfache Lie-Algebren beschränken. Entscheidend hierfür ist der Begriff eines ad-halbeinfachen, bzw. ad-nilpotenten Elementes.

Definition 1.5. Ein Element x einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ad-*halbeinfach*, bzw. ad-*nilpotent*, falls $\operatorname{ad} x$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.6. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist x auch ad-halbeinfach: Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x, wobei v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned}[x, E_{ij}](v_k) &= x E_{ij}(v_k) - E_{ij} x(v_k) = \delta_{jk} x(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\ &= \lambda_i \delta_{jk} v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_k) \delta_{jk} v_i \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}(v_k),\end{aligned}$$

und somit

$$[x, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Es ist also $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x \in \operatorname{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$ ist, ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x)|_{\mathfrak{g}}$ halbeinfach.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist x auch ad-nilpotent: Es ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x = \lambda_x - \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$ bezeichnet. Da x nilpotent ist, sind es auch λ_x und ρ_{-x}. Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$ nilpotent. Da $\mathfrak{g}$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$ ist, ist somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x)|_{\mathfrak{g}}$ nilpotent.

Das nächste Lemma erlaubt es uns, die konkrete Jordanzerlegung auf Lie-Unteralgebren einzuschränken, sofern diese halbeinfach sind.

Lemma 1.7. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Lie-Unteralgebra, so enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist $\mathfrak{g}$ eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma die Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Proposition 1.8 (Abstrakte Jordanzerlegung)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ eindeutige $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $x = x_s + x_n$,
2. x_s *ist* ad*-halbeinfach und* x_n *ist* ad*-nilpotent,*
3. x_s *und* x_n *kommutieren.*

x_s *und* x_n *sind eindeutig dadurch bestimmt, dass*

$$\operatorname{ad}(x_s) = (\operatorname{ad} x)_s \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(x_n) = (\operatorname{ad} x)_n$$

Ein Element aus $\mathfrak{g}$ kommutiert genau dann mit x, wenn es mit x_s und x_n kommutiert.

Definition 1.9. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Proposition 1.8 die *(abstrakte) Jordanzerlegung* von x. x_s ist der *halbeinfache Teil* von x und x_n der *nilpotente Teil* von x. x heißt *halbeinfach*, falls $x = x_s$, und *nilpotent* falls $x = x_n$.

Bemerkung 1.10. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $x \in \mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn x ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist $\mathfrak{g}$ linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen. Dementsprechend werden wir in diesem Fall nicht zwischen konkreter und abstrakter Jordanzerlegung unterscheiden.

Lemma 1.11 (Funktorialität der Jordanzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei halbeinfache Lie-Algebren und $x \in \mathfrak{g}_1$ mit Jordanzerlegung $x = x_s + x_n$. Ist $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\phi(x_s) = \phi(x)_s$ und $\phi(x_n) = \phi(x)_n$.*

1.3 CSA und Wurzelraumzerlegung

In diesem Schnitt erinnern an das grundlegende Konzept einer Cartan-Unteralgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra. Wir erläutern das Zustandekommen der resultierenden Wurzelraumzerlegung und halten einige ihrer elementaren Eigenschaften fest.

Definition 1.12. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *toral* falls $\mathfrak{h}$ aus ad-halbeinfaches Elementen besteht.

Beispiel 1.13. Die Unteralgebra der Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ besteht aus halbeinfachen Elementen (in der Sinne der konkreten Jordanzerlegung) und damit aus ad-halbeinfachen Elementen.

Nach gleicher Argumentation ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{d}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{t}_n(k)$.

Ist allgemeiner $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$: Für jedes $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ halbeinfach, und somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{g}'}$.

In jedem der obigen Beispiele ist die torale Unteralgebra abelsch. Dies ist kein Zufall.

Lemma 1.14. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Diese Kommutativität hat entscheidende Konsequenzen für die adjungierte Darstellung einer toralen Unteralgebra: Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \subseteq \operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ mit

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Die Elemente $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ spielen eine bedeutend Rolle bei der Untersuchung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{h}$.

Definition 1.15. Für eine torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sei

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

In der Theorie halbeinfachen Lie-Algebren, in denen (ad)-halbeinfache Elemente mithilfe der Jordanzerlegung verstanden werden können, spielen maximale torale Unteralgebren eine besondere Rolle.

Definition 1.16. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ heißen *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Lemma 1.17. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich mit den Wurzeln $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ damit eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Definition 1.18. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebrau und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist die *Wurzelraumzerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Die Räume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind die entsprechenden *Wurzelräume*

Beispiel 1.19. Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen. $\mathfrak{h}$ ist eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{h}$ ist bereits eine CSA. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine beliebige CSA, so besteht $\mathfrak{h}'$ aufgrund der Übereinstimmung der konkreten und abstrakten Jordanzerlegung aus halbeinfachen Elementen. Da $\mathfrak{h}'$ abelsch ist, sind die Elemente aus $\mathfrak{h}'$ simultan diagonalisierbar. Es gibt also $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$. Die Konjugation mit S ist ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist unter dem $\mathfrak{g}$ invariant ist, der sich also zu einem Automorphismus von $\mathfrak{g}$ einschränken lässt. Daher ist $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{h}$, woraus wegen der Maximalität von $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ folgt, dass $\mathfrak{h} = S\mathfrak{h}'S^{-1}$.

Für $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{h}$ ist

$$[X, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n,$$

wobei $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Standardbasis von $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet. Für $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ mit

$$\varepsilon_i(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_i \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

ist daher

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = kE_{ij} \quad \text{für alle } 1 \le i \ne j \le n.$$

Damit ergeben sich für $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ die Wurzeln

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le n\}$$

und die Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \ne j} kE_{ij}.$$

In diesem Beispiel zeigen sich bereits einige elementare Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung, die wir hier noch festhalten wollen.

Proposition 1.20 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. *Φ erzeugt $\mathfrak{h}^*$ als k-Vektorraum.*
2. *Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ eine k-Basis von $\mathfrak{h}^*$, so ist $\Phi \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*
3. *Für alle $\alpha \in \Phi$ ist $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.*
4. *Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind 1-dimensional.*
5. *Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ ist*
$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = 0 & \textit{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \textit{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \\ \subseteq \mathfrak{h} & \textit{falls } \alpha = -\beta. \end{cases}$$
6. *Es sei $\alpha \in \Phi$. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ ist eindimensional und $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \ne 0$.*
Insbesondere gibt es ein eindeutiges $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$ und $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Ferner ist
$$S_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$
eine Lie-Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.4 Reduktive Lie-Algebren

Reduktive Lie-Algebren enstehen durch das Hinzufügen eines Zentrums zu einer halbeinfachen Lie-Algebra, und sind eine Verallgemeinerung der solchen. Die Lie-Algebra-Struktur einer reduktiven Lie-Algebra ist durch die zugrundelegende halbeinfache Lie-Algebre bereits eindeutig bestimmt, was dazu führt, dass sich viele Konzepte und Aussagen aus der Theorie halbeinfacher Lie-Algebren direkt auf reduktive verallgemeinern lassen.

Lemma 1.21. *Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *für ein abelsches Ideal* $\mathfrak{a}$ *und ein halbeinfaches Ideal* $\mathfrak{s}$.
3. *Die adjugierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
4. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{s}$ *für die Zerlegungen in 1 und 2.*

Beweis. $(4 \Rightarrow 3)$ $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, da

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb $\mathfrak{g}$ halbeinfach als $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$-Modul
$(3 \Rightarrow 2)$ Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Die $\mathfrak{a}_i$ sind damit abelsch und die $\mathfrak{s}_j$ einfach. Also ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
$(2 \Rightarrow 1)$ Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.
$(1 \Rightarrow 4)$ Es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \operatorname{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \operatorname{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. □

Definition 1.22. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.21 erfüllt.

Beispiel 1.23. Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ sowie $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

Die oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{t}_n(k)$ sind für $n \geq 2$ nicht reduktiv. Zum einen ist $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \mathfrak{u}_n(k)$, aber $\mathfrak{t}_n(k) \supsetneq kI \oplus \mathfrak{u}_n(k)$. Zum anderen ist auch $\operatorname{rad} \mathfrak{t}_n(k) = \mathfrak{t}_n(k) \neq \mathfrak{d}_n(k) = Z(\mathfrak{t}_n(k))$.

Das Beispiel $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ zeigt auch, dass Lie-Unteralgebren reduktiver Lie-Algebren nicht notwendigerweise selber reduktiv sind.

Die Zerlegung einer reduktiven Lie-Algebra in ihr Zentrum und ihren halbeinfachen Teil ist in einem gewissem Rahmen mit Homomorphismen verträglich.

Lemma 1.24. *Es seien* $\mathfrak{g}_1$ *und* $\mathfrak{g}_2$ *zwei reduktive Lie-Algebren mit* $\mathfrak{s}_1 := [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ *und* $\mathfrak{s}_2 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. *Ist* $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist* $\phi(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}_2$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{s}_1 = [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]$, da $\mathfrak{s}_1$ halbeinfach ist. Also ist

$$\phi(\mathfrak{s}_1) = \phi([\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]) = [\phi(\mathfrak{s}_1), \phi(\mathfrak{s}_1)] \subseteq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{s}_2.$$ □

Bemerkung 1.25. Die analoge Aussage für die Zentren von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gilt im Allgemeinen nicht. So ist etwa die Inklusion $\mathfrak{d}_2(k) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(k)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, aber $Z(\mathfrak{d}_2(k)) = \mathfrak{d}_2(k) \subsetneq kI = Z(\mathfrak{gl}_2(k))$.

Der Begriff einer Cartan-Unteralgebra verallgemeinert sich direkt auf reduktive Lie-Algebren.

Definition 1.26. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ und die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind die *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Um die CSA einer reduktiven Lie-Algebra zu verstehen, genügt es, die CSA der zugrundeliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zu verstehen.

Lemma 1.27. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathit{CSA\ in}\ \mathfrak{g}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\mathit{CSA\ in}\ \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$: $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra und da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra: $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf $\mathfrak{a}$ und halbeinfach auf $\mathfrak{s}$ und damit halbeinfach auf $\mathfrak{g}$. Also ist x halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra: Als Schnitt zweier Unteralgebren ist $\mathfrak{h}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und damit von $\mathfrak{s}$. Für $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$-invariant, also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.

4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA: $\mathfrak{h}'$ ist toral. Wäre $\mathfrak{h}'$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die $\mathfrak{h}'$ echt enthält. Dann wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die $\mathfrak{h}$ echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA: Wäre $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ ist

$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$

also $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von $\mathfrak{h}'$. □

Korollar 1.28. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Dann ist $\mathfrak{h}$ genau dann eine CSA, wenn $\mathfrak{h}$ selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ so gibt es nach Lemma 1.27 eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.17 ist $Z_\mathfrak{s}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit

$$Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_\mathfrak{s}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gibt es eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h}' \subseteq Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht selbstzentralisierend. □

Korollar 1.29. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}'$.*

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ für jedes $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}'$ eine Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ ist, ist $\mathfrak{g}'$ invariant unter $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$. Also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ ist.

Es ist $Z_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist. Daher ist auch $Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, also $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.28 bereits eine CSA von $\mathfrak{g}'$. □

Auch das Konzept halbeinfacher und nilpotenter Elemente lässt sich auf reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

Definition 1.30. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra. $x \in \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn x ad-halbeinfach ist. x heißt *nilpotent*, wenn $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und x ad-nilpotent ist.

Bemerkung 1.31. Per Definition ist eine CSA einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine maximale Unteralgebra, die aus halbeinfachen Elementen besteht.

Jedes halbeinfache Element $X \in \mathfrak{g}$ ist in einer CSA enthalten; es ist nämlich $kX \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, und diese ist in einer toralen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von maximaler Dimension enthalten. Wegen der Dimensionsmaximalität ist $\mathfrak{h}$ bereits eine maximale torale Unteralgebra.

Insbesondere ergibt sich mit $X = 0$, dass in jeder reduktiven Lie-Algebra eine CSA existiert.

Beispiel 1.32. Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(k)$ ist ein Element $x \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent im Sinne von Definition 1.30, wenn x halbeinfach, bzw. nilpotent im Sinne der konkreten Jordanzerlegung ist.

Wir schreiben DH und DN für Halbeinfachkeit und Nilpotenz im Sinne von Definition 1.30, und JH und JN für Halbeinfachbarkeit und Nilpotenz im Sinne der konkreten Jordanzerlegung.

Dass DS aus JS folgt ist aus Beispiel 1.6 bekannt. Ist $x \in \mathfrak{g}$ JN, so ist 0 der einzige Eigenwert von x und somit $x \in \mathfrak{sl}_n(k) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Außerdem ist x ad-nilpotent nach Beispiel 1.6. Somit ist x DN.

Es sei $x \in \mathfrak{g}$ DH mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\mathfrak{sl}_n(k)$ invariant unter $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x_2$ ist, ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{sl}_n(k)} x_2 = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x_2)|_{\mathfrak{sl}_n(k)} = (\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)|_{\mathfrak{sl}_n(k)}$$

Also ist x_2 ein ad-halbeinfaches Element von $\mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\mathfrak{sl}_n(k)$ halbeinfach ist, folgt, dass x_2 bereits JH ist. Da $x_1 \in kI$ ist auch x_1 JH. Da x_1 und x_2 kommutieren und JH sind, ist auch $x_1 + x_2$ JH.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ DN, so ist $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}_n(k)$ und es folgt analog, dass x bereits JN ist.

Bemerkung 1.33. In einer beliebigen linearen reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind halbeinfache, bzw. nilpotente Element (im Sinne von Definition 1.30) nicht notwendigerweise halbeinfach, bzw. nilpotent im Sinne der konkreten Jordanzerlegung.

So ist etwa

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in k \right\}$$

eine abelsche, und damit reduktive, Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_2(k)$. Im Sinne von Definition 1.30 sind alle Elemente aus $\mathfrak{g}$ halbeinfach, im Sinne der konkreten Jordanzerlegung ist allerdings 0 das einzige halbeinfache Element in $\mathfrak{g}$.

1.5 Innere Automorphismen

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Konjugationsbeziehung von CSA in halbeinfache Lie-Algebren ein und verallgemeinern diese auf reduktive Lie-Algebren. Eine besondere Rolle spielen hierbei die inneren Automorphismen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die eine Untergruppe $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ von $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ bilden. Wir können $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ besser kontrollieren und verstehen als die gesamte Gruppe $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, und alle Konjugationsaussagen beziehen sich auf $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Ist $b\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von $\mathfrak{g}$, also

$$a([x,y]) = [a(x),y] + [x,a(y)] \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([x,y]) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [a^\ell(x), a^{n-\ell}(y)] \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist.

Insbesondere ist damit $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $x \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.34. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von den Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$, mit $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent, erzeugt wird. Die Elemente von $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen*.

Lemma 1.35. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Dann ist*

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(x)y\exp(x)^{-1} \quad \textit{für alle } y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\operatorname{ad} x = \lambda_x + \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x ist und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$. λ_x und ρ_{-x} sind nilpotent, da x nilpotent ist. Für alle $y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_x)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_x)^n}{n!}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) y = \lambda_{\exp(x)}(y).$$

Analog ergibt sich, dass

$$\exp(\rho(-x)) = \rho_{\exp(-x)} = \rho_{\exp(x)^{-1}}.$$

Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist daher für alle $y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(\lambda_x + \rho_{-x})(y) = \lambda_{\exp(x)}\rho_{\exp(x)^{-1}}(y) = \exp(x) y \exp(x)^{-1}.$$

□

Beispiel 1.36. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$. Ist $x \in \mathfrak{g}_B \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ nilpotent, so ist $\exp(x) \in G_B$. Ist $\mathfrak{g}_B$ halbeinfach, so folgt aus der Übereinstimmung von konkreter und abstrakter Jordanzerlegung, dass $x \in \mathfrak{g}_B$ genau dann ad-nilpotent ist, wenn x nilpotent ist. Deshalb ist dann ist bereits jedes $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ durch Konjugation mit passenden $S \in G_B$ gegeben.

Beispiel 1.37. Es sei $x \in \mathfrak{gl}_n(k)$ ad-nilpotent mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$. Da $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x_2$ ist $x_2 \in \mathfrak{sl}_n(k) = [\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)]$ ad-nilpotent, und somit nilpotent im Sinne der konkreten Jordanzerlegung. (Siehe Beispiel 1.32.) Inbesondere ist für alle $y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(\operatorname{ad} x_2)(y) = \exp(x_2) y \exp(x_2)^{-1}.$$

Also ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem passenden Element $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

Die Lie-Klammer einer reduktiven Lie-Algebra hängt nur von der Lie-Klammer der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra ab. Dementsprechend lassen sich auch die inneren Automorphismen einer reduktiven Lie-Algebra durch die inneren Automorphismen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra verstehen.

Lemma 1.38. *Es sei $\mathfrak{g}$ reduktiv und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann ist $\mathfrak{s}$ invariant unter* $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$ *und*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} \mathfrak{g} &\cong \operatorname{Int} \mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\leftarrow\!\shortmid \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\operatorname{ad}_{Z(\mathfrak{g})} x_1) \oplus (\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2.$$

Somit ist x genau dann ad-nilpotent in $\mathfrak{g}$, wenn x_2 ad-nilpotent in $\mathfrak{s}$ ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x) = \exp(0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = \mathrm{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2).$$

Damit ist

$$\operatorname{Int}\mathfrak{s} = \langle \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent}\rangle$$

und

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} = \left\langle \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \right\rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Wir kommen nun zu der grundlegenden Konjugationsaussage dieses Abschnittes.

Lemma 1.39. *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$*, d.h. für je zwei CSA $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Korollar 1.40. *Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.27 gibt es zwei CSA $\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_2' \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1'$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.39 gibt es $\tau \in \operatorname{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}_1') = \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.38 ist $\sigma := \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_2.$$ □

Wir wollen uns noch mit der Fortsetzbarkeit von inneren Automorphismen zwischen reduktiven Lie-Algebren beschäftigen.

Lemma 1.41. *Es sei $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ ein reduktive Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Dann lässt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}'$ zu einem inneren Automorphismus von $\mathfrak{g}$ fortsetzen.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x)$ für $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'}$-nilpotentes $x \in \mathfrak{g}'$ zu zeigen. Es sei $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2$ ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}'} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2)|_{\mathfrak{s}'}$ nilpotent. Also ist x_2 ein nilpotentes Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}'$.

Mit der Inklusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ folgt aus Lemma 1.24, dass $x_2 \in \mathfrak{s}$. Aus der Funktorialität der Jordanzerlegung ergibt sich außerdem, dass x_2 bereits ein nilpotentes Element von $\mathfrak{s}$ ist.

Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2$ nilpotent und damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2 = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}(x_2)$. Damit ist $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2) \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$, und da

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

ist

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x) = \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}.$$ □

Kapitel 2

Halbeinfache Orbiten

Ein klassisches Problem der linearen Algebra besteht darin, die halbeinfachen Elemente in $\mathfrak{gl}_n(k)$ zu verstehen, und der klassische Ansatz hierfür besteht darin, nicht die halbeinfachen Elemente selbst zu betrachten, sondern ihre Konjugationsklassen unter $\mathrm{GL}_n(k)$.

Konkret ergibt sich, dass jede halbeinfache Matrix konjugiert zu einer Diagonalmatrix ist, und je zwei Diagonalmatrizen genau dann konjugiert zueinander sind, wenn sie bis auf Reihenfolge die gleichen Diagonaleinträge mit gleicher Vielfachheit haben. Die Orbiten halbeinfacher Matrizen unter $\mathrm{GL}_n(k)$ werden deshalb durch k^n/S_n parametrisiert, wobei S_n durch Permutation der Einträge auf k^n wirkt.

In diesem Kapitel verallgemeinern wir dieses Vorgehen auf reduktive Lie-Algebren, um die halbeinfachen Elemente in diesen besser zu verstehen. Hierfür kehren wir zunächst zu $\mathfrak{gl}_n(k)$ zurück und leiten die obige Klassifikation erneut her. Anschließend betrachten wir eine beliebige reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ unter der Wirkung einer passenden Gruppe G und verallgemeinern das Vorgehen für $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{g}$ und G. Als Anwendung der allgemeinen Theorie klassifizieren wir anschließend die Orbiten halbeinfacher Element in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter der Wirkung von $O_{2n}(k)$ und $SO_{2n}(k)$, die Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$ unter $O_{2n+1}(k)$ und $SO_{2n+1}(k)$, sowie die Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$.

2.1 Motivation $\mathfrak{gl}_n(k)$

Als Motivation und zur Entwicklung der allgemeinen Theorie betrachten wir zunächst $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$.

Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$

der *Orbit* von X unter $\mathrm{GL}_n(k)$. Ein Orbit $\mathcal{O}$ heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ für ein halbeinfaches $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$.

Unser erster Schritt besteht darin, den Zentralisator eines halbeinfachen Elements zu verstehen.

Lemma 2.1. *Ist $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit

$$SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r), \tag{1}$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und λ_i komme mit Vielfachheit n_i vor. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ der X auf SXS^{-1} abbildet und damit auch $\mathfrak{g}^X$ auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt also die Aussage unter der Annahme zu zeigen, dass X eine Diagonalmatrix der Form (1) ist.

Es sei

$$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \tag{2}$$

und $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i, j)-te Eintrag von AX ist $\mu_j a_{ij}$ und der (i, j)-te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Deshalb ist $A \in \mathfrak{g}^X$ äquivalent dazu, dass

$$\mu_i = \mu_j \quad \text{oder} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Aus (2) ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \;\middle|\; A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \dots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k)$$

und damit reduktiv. □

Hieraus folgt direkt die folgende Beobachtung, die sich im Folgenden als überaus nützlich erweisen wird:

Korollar 2.2. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Dann ist $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{d}_n(k)$.*

Lemma 2.3. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$, also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'}$. X' ist halbeinfach, da $\mathcal{O}$ ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Da alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ sind, und jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben ist (siehe Beispiel 1.37) gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesondere ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}.$$ □

Theorem 2.4. *Es sei $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und*

$$W := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) / Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}).$$

Ferner sei

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/W \to \mathcal{S}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist besteht $\mathfrak{h}$ aus halbeinfachen Elementen (siehe Beispiel 1.32). Deshalb ist $\mathcal{O}_X$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{h} \to \mathcal{S}, X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.3 ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SXS^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{S}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Da $\tilde{\varphi}$ über φ faktorisiert ist auch φ surjektiv.

Für die Injektivität von φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $SX_2S^{-1} = X_1$. Dann sind $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$ die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.1 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv. Nach Korollar 1.29 sind $\mathfrak{h}$ und $S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Korollar 1.40 gibt es somit $\tau \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\tau(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h}$.

Ist $y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ nilpotent, so ist $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} y)(X_1) = 0$, also

$$\exp(y)X_1\exp(y)^{-1} = \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} y)(X_1) = X_1.$$

und somit $\exp(y) \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X_1)$. Daher ist jedes Element aus $\operatorname{Int}\mathfrak{g}^X$ durch Konjugation mit einem Element aus $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X_1)$ gegeben. Insbesondere ist σ durch Konjugation mit passenden $T \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(TS)\mathfrak{h}(TS)^{-1} = TS\mathfrak{h}S^{-1}T^{-1} = \tau(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h},$$

also $TS \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$, mit

$$(TS)X_2(TS)^{-1} = TSX_2S^{-1}T^{-1} = TX_1T^{-1} = X_1.$$

Somit sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert. □

Lemma 2.5. *Es bestehe $T \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ aus Diagonalmatrizen und es gebe $X \in T$ mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S.T = T\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es sei $X = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Für $S = (s_{ij}) \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ ist dann $SXS^{-1} \in T$ eine Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Es ist dann

$$SX = X\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Der (i,j)-te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i,j)-te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \ldots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij}(\mu_i s_{ij'}) = s_{ij}(\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij}s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag der nicht 0 ist. Da S invertierbar ist, ist in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag verschieden von 0. Also ist in jeder Zeile von S genau eine Zeile nicht Null.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ gibt es andererseits auch $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in T$ mit

$$XS = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)X.$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der nicht 0 ist. □

Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die CSA der Diagonalmatrizen. $\mathfrak{h}$ enthält eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen.

Nach Lemma 2.5 besteht $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ daher aus Monomialmatrizen. Andererseits wird $\mathfrak{h}$ von jeder Monomialmatrix aus $\mathrm{GL}_n(k)$ normalisiert. Also ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)}$ die Untergruppe der invertierbaren Monomialmatrizen.

Außerdem besteht $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ nach Korollar 2.2 aus Diagonalmatrizen, und jede Diagonalmatrix aus $\mathrm{GL}_n(k)$ zentralisiert $\mathfrak{h}$. Also ist $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen.

Also ist

$$W := N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)} \cong S_n$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht der Permutation der Diagonaleinträge durch S_n. Durch die zusätzliche Identifikation

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

ergibt sich, dass die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ klassifiziert sind durch

$$\begin{aligned} k^n/S_n &\xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k) \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, \\ [(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)] &\mapsto \mathcal{O}_{\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}, \end{aligned}$$

wobei S_n auf k^n durch Permutation der Einträge wirkt.

2.2 Der allgemeine Fall

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathcal{O}_X := \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

der Orbit von X unter G. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathcal{O}$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\operatorname{ad} \phi(X) = \phi(\operatorname{ad} X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } \phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}.$$

Daher ist X genau dann halbeinfach wenn $\mathcal{O}_X$ ein halbeinfacher Orbit ist.

In diesem Abschnitt klassifizieren wir die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g}$. Dabei arbeiten unter der zusätzlichen Annahme, dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, dass durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Darunter fallen die folgenden Beispiele:

Beispiel 2.6. 1. $\mathrm{GL}_n(k)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und nach Lemma 1.35 ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{g}_B$ reduktiv ist. Dann wirkt G_B durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_B$, und durch direktes Nachrechnen ergibt sich, dass für nilpotentes $x \in \mathfrak{g}_B$ auch $\exp(x) \in G_B$. Also ist nach Lemma 1.35 jeder innere Automorphismus durch Konjugaton mit einem Element aus G_B gegeben. Hieraus ergeben sich mehrere konkrete Beispiele:

   (a) Für $B = 0$ erneut die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$

   (b) Für $I \in \mathrm{M}_n(k)$ ergibt sich die Konjugationswirkung der orthogonalen Gruppe
   $$O_n(k) \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T = S^{-1}\}$$
   auf den schiefsymmetrischen Matrizen
   $$\mathfrak{so}_n(k) \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T = -A\}.$$

   (c) Für
   $$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$
   ergibt sich die Konjugationsgruppe der symplektischen Gruppe
   $$\mathrm{Sp}_{2n}(k) \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T \Omega S = \Omega\}$$
   auf der symplektischen Lie-Algebra
   $$\mathfrak{sp}_{2n}(k) \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T\Omega + \Omega A = 0\}$$

3. Für eine beliebige reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wirkt $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ auf natürliche Weise auf $\mathfrak{g}$ und jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist insbesondere ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$.

Ist $X \in \mathrm{M}_n(k)$ nilpotent, so ist $\det\exp(X) = 1$. Da X nilpotent ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, so dass SXS^{-1} eine echte obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist auch $\sum_{m=1}^{\infty}(SXS^{-1})^m/m!$ eine echte obere Dreiecksmatrix und somit $\exp(SXS^{-1})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Damit ist
$$1 = \det(\exp(SXS^{-1})) = \det(S\exp(X)S^{-1}) = \det(\exp(X)).$$
Damit ergeben sich weitere Beispiele:

4. (a) Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$ mit $\mathfrak{g}_B$ reduktiv, so ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}_B$ bereits durch Konjugation mit einem Element aus
   $$SG_B \coloneqq \{S \in G_B \mid \det(S) = 1\}$$
   gegeben. Inbesondere ergibt sich für $B = I$ die Konjugationswirkung von
   $$SO_n(k) \coloneqq \{S \in O_n(k) \mid \det S = 1\}$$
   auf $\mathfrak{so}_n(k)$.

(b) Ist $\mathfrak{g}$ reduktiv, so ist für nilpotentes $X \in \mathfrak{g}$ bereits $\exp(\operatorname{ad} X) \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ und somit
$$\operatorname{Int} \mathfrak{g} \subseteq \{\phi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \mid \det \phi = 1\}.$$

Proposition 2.7. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA die X enthält. Es seien $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*
$$\Phi_X := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}.$$
Dann ist
$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha$$
und $\mathfrak{g}^X$ ist reduktiv.

Beweis. Es sei
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$
die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Für $Y \in \mathfrak{g}$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} Y_\alpha$ bezüglich (3) ist
$$[X, Y] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(X) Y_\alpha.$$
Wegen der Direktheit der Zerlegung (3) folgt, dass genau dann $Y \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\alpha(X)Y_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Also ist
$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{4}$$

Für $Z(\mathfrak{g}^X)$ ergibt sich, dass
$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha. \tag{5}$$
Denn es ist
$$Z(\mathfrak{g}^X) = Z_{\mathfrak{g}^X}(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$
und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist
$$[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \alpha(Y) \mathfrak{g}_\alpha,$$
also $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von $\mathfrak{g}^X$ gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Es ist also
$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$
aber $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ ist nicht auflösbar. $\square$

Als erste Annäherung ergibt sich, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$: Andernfalls gebe es $Y \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha\in\Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und

$$\Psi \coloneqq \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Da $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist für alle $h \in \mathfrak{h}$ und $\ell \geq 1$ auch

$$\operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X.$$

Behauptung 2. Es gibt $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(h) \neq \beta(h)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des natürlichen Isomorphismus $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^{**}$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}_k \Phi$ gibt es eine k-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ von $\mathfrak{h}^*$. k ist algebraisch abgeschlossen und somit unendlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Also gibt es $z_1, \ldots, z_n \in k$ die linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Es sei $\varphi\colon \mathfrak{h}^* \to k$ die k-lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. □

Es sei $h \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2. Für $\ell = 1, \ldots, n$ sei

$$Z_\ell \coloneqq \operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X.$$

Es sei $\Psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Da die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ eindimensional sind ist $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Psi}$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $\{Z_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\
&= \alpha_1(h)\cdots\alpha_n(h) \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \alpha_1(h)\cdots\alpha_n(h) \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0.
\end{aligned}$$

Da $Z_1, \ldots, Z_n \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da $\Psi \neq 0$ gibt damit $\alpha \in \Psi \subseteq \Phi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$, im Widerspruch zu Behauptung 1. Also ist $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (5) ein $\alpha \in \mathfrak{g}^X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Da $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist damit

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \operatorname{rad}\mathfrak{g}^X,$$

im Widerspruch zu Behauptung 1. Insgesamt zeigt dies, dass $\operatorname{rad}\mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. □

Korollar 2.8. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Annahme ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2$ ist halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2$, also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach und somit X_2 ein halbeinfaches Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$. Damit ist $\mathfrak{s}^{X_2}$ nach Proposition 2.7 reduktiv und somit auch

$$\mathfrak{g}^X = Z(\mathfrak{g})^{X_1} \oplus \mathfrak{s}^{X_2} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}^{X_2},$$

da $Z(\mathfrak{g})$ abelsch ist. □

Lemma 2.9. *Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Dann gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Beweis. Nach Korollar 1.40 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ und nach Annahme gibt es $s \in G$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = s \cdot \mathfrak{h}_1$. □

Korollar 2.10. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. Dann ist X' halbeinfach und in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ einhalten. Nach Lemma 2.9 gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Dann ist $X := s \cdot X' \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$. □

Theorem 2.11. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und*

$$W := N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}).$$

Dann ist die Abbildung

$$\Phi \colon \mathfrak{h}/W \to \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \textit{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ aus halbeinfachen Elementen besteht und $\mathcal{O}_{s \cdot X} = \mathcal{O}_X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $s \in G$ ist Φ wohldefiniert. Nach Korollar 2.10 ist Φ surjektiv.

Es seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$. Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass X_1 und X_2 unter G konjugiert sind. Da $X_1 \in \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $s \in G$ mit $s \cdot X_2 = X_1$. $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ sind zwei CSA von $\mathfrak{g}$, die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind ist bereits $\mathfrak{h}, s \cdot \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$, wobei $\mathfrak{g}^{X_1}$ nach Proposition 2.7 reduktiv ist. Nach Korollar 1.29 sind $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$.

Nach Korollar 1.40 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Behauptung. Es ist $\sigma(X_1) = X_1$.

Beweis. Für $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}$-nilpotentes $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ ist ist $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = 0$ und somit

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)^n}{n!}(X_1) = X_1.$$ □

Nach Lemma 1.41 lässt sich σ zu einem inneren Automorphismus $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ fortsetzen. Nach Annahme gibt es $t \in G$, so dass t durch τ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Zum einen ist

$$t \cdot s \cdot \mathfrak{h} = \tau(s \cdot \mathfrak{h}) = \sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},$$

also $t \cdot s \in N_G(\mathfrak{h})$. Zum anderen ist $X_1 \in \mathfrak{g}^{X_1}$ und somit

$$t \cdot s \cdot X_2 = t \cdot X_1 = \tau(X_1) = \sigma(X_1) = X_1.$$ □

2.3 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}k$ unter der Konjugationswirkung von $O_{2n}(k)$ bestimmen. Nach Theorem 2.11 genügt es hierfür eine CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{so}_{2n}(k)$ zu finden und den Quotienten $N_{O_{2n}(k)}/Z_{O_{2n}(k)}$ zu berechnen.

2.3.1 Alternative Definition

Wir nicht direkt mit $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ sondern mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_J = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T J + JA = 0\},$$

und den entsprechenden Gruppen

$$G := G_J = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^T JS = J\}$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k).$$

$\mathfrak{g}$ ist isomorph zu $\mathfrak{so}_{2n}(k)$. Per Definition ist $\mathfrak{so}_{2n}(k) = \mathfrak{g}_I$ für die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{M}_{2n}(k)$. I und J beschreiben die gleiche Bilinearform bezüglich zweier Basen. Bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_{2n}$ von k^{2n} beschreibt I die Standardbilinearform auf k^{2n}. Bezüglich der Basis $e'_1, \ldots, e'_{2n}$ von k^{2n} mit

$$\begin{aligned} e'_1 &:= \frac{e_1 + ie_{2n}}{\sqrt{2}}, & e'_{2n} &:= \frac{e_1 - ie_{2n}}{\sqrt{2}}, \\ e'_2 &:= \frac{e_2 + ie_{2n-1}}{\sqrt{2}}, & e'_{2n-1} &:= \frac{e_2 - ie_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \\ &\vdots & &\vdots \\ e'_n &:= \frac{e_n + ie_{n+1}}{\sqrt{2}}, & e'_{n+1} &:= \frac{e_n - ie_{n+1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

wird die Standardbilinearform von J beschrieben. Insbesondere induziert die entsprechende Basiswechselmatrix

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & i & -i & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ i & & & & & -i \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\Phi \colon \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{g}_I = \mathfrak{so}_{2n}(k), A \mapsto \Omega A \Omega^{-1}.$$

und Isomorphismen von Gruppen

$$\varphi \colon G = G_J \to G_I = O_{2n}(k), S \mapsto \Omega S \Omega^{-1}.$$

Φ und φ sind mit der jeweiligen Gruppenwirkung durch Konjugation verträglich, da für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $S \in G$

$$\varphi(S) \cdot \Phi(X) = \Phi(S \cdot X).$$

Also ist für alle $X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{O}_X) &= \{\Phi(A) \mid A \in \mathcal{O}_X\} = \{\Phi(S \cdot X) \mid S \in G\} \\ &= \{\varphi(S) \cdot \Phi(X) \mid S \in G\} = \{S \cdot \Phi(X) \mid S \in O_{2n}(k)\} \\ &= \mathcal{O}_{\Phi(X)}.\end{aligned}$$

Die Klassifikation halbeinfacher Orbiten in $\mathfrak{g}$ unter G ist also äquivalent zu der Klassifikation halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$.

Ähnlich wie sich $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $O_{2n}(k)$ durch das Transponierte ergeben lassen sich auch $\mathfrak{g}$ und G beschreiben:

Definition 2.12. Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(k)$. ie *Anti-Transponierte* von A ist

$$A^S \coloneqq (a_{n+1-j,n+1-i})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

A^S ist das Transponierte von A an der Anti-Diagonalen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^S = \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Die Anti-Transponierte kann auch über die Transponierte beschrieben werden.

Lemma 2.13. *Für alle $A \in \mathrm{M}_n(k)$ ist*

$$A^S = JA^TJ,$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

Beweis. Es ist

$$JA^TJ = J(a_{ij})_{ij}^T J = J(a_{ji})_{ij}J = J(a_{j,n+1-i})_{ij} = (a_{n+1-j,n+1-i})_{ij} = A^S.$$

□

Da $J^2 = I$ ist ergibt sich damit, dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^S = -A\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,2n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & 0 & -a_{1,2n-1} \\ a_{2n-1,1} & 0 & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{2n-1,1} & \cdots & -a_{11} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in k \text{ für alle } i+j \leq 2n \right\}\end{aligned}$$

und

$$G = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^{-1} = S^S\}.$$

Wir halten noch die folgenden Rechenregel für das Anti-Transponierte fest:

Lemma 2.14. *1. Für $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist $(AB)^S = B^S A^S$.*

2. Ist $P \in \mathrm{M}_n(k)$ eine Permutationsmatrix, so auch P^S.

3. Ist $D \in \mathrm{M}_n(k)$ eine Diagonalmatrix, so auch D^S.

Beweis. Die Aussagen ergeben sich direkt daraus, dass $A^S = JA^TJ$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(k)$. □

2.3.2 Cartan-Unteralgebra

Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, also

$$\mathfrak{h} = \{\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

Da die Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ eine CSA von $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$ bilden ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{d}_{2n}(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$. Da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)} \mathfrak{h}$ somit aus halbeinfachen Endomorphismen besteht und $\mathfrak{g}$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)} \mathfrak{h}$ ist, folgt, dass auch

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X \mid X \in \mathfrak{h}\} = \{(\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)} X)|_{\mathfrak{g}} \mid X \in \mathfrak{h}\}$$

aus halbeinfachen Endomorphismen besteht. Also ist $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix X mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält ist nach Korollar 2.2

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g} \subseteq Z_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)}(X) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{d}_{2n}(k) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}.$$

Also ist $\mathfrak{h}$ selbstzentralisierend und damit nach Korollar 1.28 eine CSA von $\mathfrak{g}$.

2.3.3 Normalisator und Zentralisator

Zur Berechnung von $N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h})$ bestimmen wir zunächst $N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ und $Z_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$, da

$$N_G(\mathfrak{h}) = N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \quad \text{und} \quad Z_G(\mathfrak{h}) = Z_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G.$$

Da $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält ist $Z_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k)$ nach Korollar 2.2. Somit ist

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G.$$

Da $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält besteht $N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ nach Lemma 2.5 aus Monomialmatrizen. Somit besteht $N_G(\mathfrak{h})$ aus Monomialmatrizen.

Es sei $N_{\mathrm{D}} \coloneqq N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{D}_n(k)$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen und $N_{\mathrm{P}} \coloneqq N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{P}_n(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Wir wissen bereits, dass $N_{\mathrm{D}} = Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G$.

Behauptung 1. Es ist bereits $N_G(\mathfrak{h}) = N_{\mathrm{D}} N_{\mathrm{P}} = \{DP \mid D \in N_{\mathrm{D}}, P \in N_{\mathrm{P}}\}$.

Beweis. Es sei $M \in N_G(\mathfrak{h})$. Da M eine Monomialmatrix ist gibt es eine eindeutige Diagonalmatrix $D \in \mathrm{D}_{2n}(k)$ und eine eindeutige Permutationsmatrix $P \in \mathrm{P}_{2n}(k)$ mit $M = DP$. Es gilt zu zeigen, dass $D \in N_{\mathrm{D}}$ und $P \in N_{\mathrm{P}}$.

Da $M \in G$ ist $MM^S = I$ und somit

$$I = MM^S = DP(DP)^S = DPP^S D^S$$

ist

$$PP^S = D^{-1}(D^S)^{-1} = (D^S D)^{-1}.$$

Da PP^S eine Permutationsmatrix und $(D^S D)^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, folgt, dass bereits

$$PP^S = I = DD^S.$$

Also ist $D \in G$ und somit $D \in \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G = N_\mathrm{D}$. Inbesondere ist $D \in N_G(\mathfrak{h})$, somit auch $P = D^{-1}M \in N_G(\mathfrak{h})$ und damit $P \in N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = N_\mathrm{P}$. □

Es ist $\mathrm{D}_{2n}(k) \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = 1$ und $\mathrm{D}_{2n}(k)$ ist normal in $\mathrm{Mon}_{2n}(k)$. Deshalb ist auch $N_\mathrm{D} \cap N_\mathrm{P} = 1$ und $N_\mathrm{D} = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap N_G(\mathfrak{h})$ ist normal in $N_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{Mon}_{2n}(k) \cap N_G(\mathfrak{h})$ mit $N_G(\mathfrak{h}) = N_\mathrm{D} N_\mathrm{P}$. Also ist $N_G(\mathfrak{h}) = N_\mathrm{D} \rtimes N_\mathrm{P}$.

Da $N_G(\mathfrak{h}) = N_\mathrm{D} \rtimes N_\mathrm{P}$ und $Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G = N_\mathrm{D}$ ist

$$W \coloneqq N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = (N_\mathrm{D} \rtimes N_\mathrm{P})/N_\mathrm{D} \cong N_\mathrm{P}$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht der Konjugationswirkung von N_P. Zur Bestimmung von

$$N_\mathrm{P} = N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G$$

berechnen wir zunächst $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ unter der Konjugations von $\mathrm{P}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{g}$ und untersuchen dann, welche $P \in N_{\mathrm{P}\,2n(k)}$ die Bedingung $P^{-1} = P^S$ erfüllen. Da $\mathfrak{h}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ ist können wir für die Berechnung von $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ auch die Konjugationwirkung von $\mathrm{P}_{2n}(k)$ auf den $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ betrachten.

Es sei $S_{2n} \cong \mathrm{P}_{2n}(k), \pi \mapsto A_\pi$ der eindeutige Gruppenisomorphismus mit

$$A_\pi e_i = A e_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, 2n,$$

wobei $e_1, \ldots, e_{2n}$ die Standardbasis von k^{2n} ist. Die Konjugationswirkung von $\mathrm{P}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ entspricht unter diesem Isomorphismus einer Wirkung von S_{2n} auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$. Da für alle $i = 1, \ldots, 2n$ und $\pi \in S_{2n}$

$$A_\pi \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) A_\pi^{-1} e_i = \lambda_{\pi^{-1}(i)} e_i$$

ist die entsprechende Wirkung von S_{2n} auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ durch

$$\pi \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\pi^{-1}(2n)}).$$

gegeben. Unter dem Isomorphismus $\mathrm{P}_{2n}(k) \cong S_{2n}$ korrespondiert $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ damit zu $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Dass $A_\pi^S = A_\pi^{-1}$ hängt nur von π ab: Die Permutationsmatrix A_π ist orthogonal, d.h. $A_\pi^{-1} = A^T$. Dass

$$A_\pi^{-1} = A^S = JA^T J = JA_\pi^{-1} J$$

ist also äquivalent dazu, dass $A_\pi^{-1} \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J)$, dass also $A_\pi \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J)$. Da $J = A_{\pi_J}$ für die Permutation $\pi_J \in S_{2n}$ mit

$$\pi_J(i) = 2n + 1 - i \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, 2n$$

ist wegen des Isomorphismus $\mathrm{P}_{2n}(k) \cong S_{2n}$ genau dann $A_\pi \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J)$ wenn $\pi \in Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. Damit ist

$$W \cong N_{\mathrm{P}} = N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J).$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ korrespondiert zu der Permutation der Diagonaleinträge durch $S_{2n} \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J)$.

Zur Bestimmung von $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ betrachten wir zwei spezielle Arten von Permutationen: Für $\pi \in S_n$ sei $\tau_\pi \in S_{2n}$ definiert als

$$\left.\begin{aligned} \tau_\pi(i) &:= \pi(i) \quad \text{und} \\ \tau_\pi(2n+1-i) &:= 2n+1-\pi(i) \end{aligned}\right\} \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Behauptung 2. 1. Die Abbildung $S_n \to S_{2n}, \pi \mapsto \tau_\pi$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

2. Es sei $\pi \in S_n$ und

$$X = (a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \in \mathfrak{h}.$$

Dann ist

$$\tau_\pi \cdot X = \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \dots, -a_{\pi^{-1}(1)}\right).$$

Insbesondere ist $\tau_\pi \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Beweis. 1. Für $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ ist für alle $i = 1, \dots n$

$$\tau_{\pi_1}\tau_{\pi_2}(i) = \tau_{\pi_1}(\pi_2(i)) = \pi_1(\pi_2(i)) = \tau_{\pi_1\pi_2}(i)$$

sowie

$$\begin{aligned} \tau_{\pi_1}\tau_{\pi_2}(2n+1-i) &= \tau_{\pi_1}(2n+1-\pi_2(i)) \\ &= 2n+1-\pi_1\pi_2(i) = \tau_{\pi_1\pi_2}(2n+1-i). \end{aligned}$$

Sind $\pi, \pi' \in S_n$ mit $\tau_\pi = \tau_{\pi'}$ so ist für alle $i = 1, \dots, n$

$$\pi(i) = \tau_\pi(i) = \tau_{\pi'}(i) = \pi'(i)$$

und somit $\pi = \pi'$.

2. Es ist

$$X = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{2n}) \quad \text{mit} \quad a_{2n+1-i} = -a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Da $\tau_\pi^{-1} = \tau_{\pi^{-1}}$ ist somit

$$\begin{aligned} \tau_\pi \cdot X &= \operatorname{diag}\left(a_{\tau_\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\tau_\pi^{-1}(2n)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left((a_{\tau_{\pi^{-1}}(1)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(n)}, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-n)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-1)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, a_{2n+1-\pi^{-1}(n)}, \dots, a_{2n+1-\pi^{-1}(1)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \dots, -a_{\pi^{-1}(1)}\right) \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$ □

Für alle $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n$ sei $\sigma_\varepsilon \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ definiert als

$$\sigma_\varepsilon(i) := \begin{cases} i & \text{falls } \varepsilon_i = 1, \\ 2n+1-i & \text{falls } \varepsilon_i = -1, \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\sigma_\varepsilon(2n+1-i) := \begin{cases} 2n+1-i & \text{falls } \varepsilon_i = 1, \\ i & \text{falls } \varepsilon_i = -1. \end{cases} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

σ_ε vertauscht also i und $2n+1-i$ falls $\varepsilon_i = -1$ und lässt sie für $\varepsilon_i = 1$ unverändert.

Behauptung 3. 1. Fassen wir $\mathbb{Z}/2$ als die multiplikative Gruppe $\{+1, -1\}$ auf, so ist die Abbildung $(\mathbb{Z}/2)^n \to S_{2n}, \varepsilon \mapsto \sigma_\varepsilon$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

2. Es sei $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ und

$$X = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1)$$

Dann ist

$$\sigma_\varepsilon \cdot X = \operatorname{diag}(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n, -\varepsilon_n a_n, \dots, -\varepsilon_1 a_1).$$

Insbesondere ist $\sigma_\varepsilon \cdot X \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Beweis. 1. Fassen wir $\mathbb{Z}/2$ als additive Gruppe $\{0, 1\}$ auf, so gilt für $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, dass

$$\sigma_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\varepsilon_i}.$$

Die die Zykel $(i, ; 2n+1-i)$ für $i = 1, \dots, n$ disjunkt sind ist für $\varepsilon' \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ deshalb

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon'} &= \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\varepsilon_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\varepsilon'_i} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\varepsilon_i} (i,\ 2n+1-i)^{\varepsilon'_i} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\varepsilon_i + \varepsilon'_i} = \sigma_{\varepsilon + \varepsilon'}. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\sigma_\varepsilon = 1$, so ist $\sigma_\varepsilon(i) = i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und deshalb $\varepsilon_i = 0$ für alle $i = 1, \dots n$.

2. Es sei $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{+1, -1\}^n$ und

$$\sigma_\varepsilon \cdot X = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_{2n}) \in \mathfrak{d}_{2n}(k).$$

Da $X \in \mathfrak{h}$ ist $X = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{2n})$ mit $a_{2n+1-i} = -a_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es ist $\sigma_\varepsilon^{-1} = \sigma_{\varepsilon^{-1}} = \sigma_\varepsilon$. Für $1 \leq i \leq n$ mit $\varepsilon_i = 1$ ist deshalb

$$b_i = a_{\sigma_\varepsilon^{-1}(i)} = a_{\sigma_\varepsilon(i)} = a_i = \varepsilon_i a_i$$

und für $\varepsilon_i = -1$ ist

$$b_i = a_{\sigma_\varepsilon^{-1}(i)} = a_{\sigma_\varepsilon(i)} = a_{2n+1-i} = -a_i = \varepsilon_i a_i. \qquad \square$$

Proposition 2.15. *Es sei* $N_{S_n} = \{\tau_\pi \mid \pi \in S_n\}$ *und* $N_{\mathbb{Z}/2} = \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n\}$.

1. *Es ist* $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = N_{S_n} N_{\mathbb{Z}/2}$, *d.h. jedes* $\omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ *ist von der Form* $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$ *für passende* $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ *und* $\pi \in S_n$.
2. $N_{S_{2n}} \cap N_{\mathbb{Z}/2} = 1$.
3. $N_{\mathbb{Z}/2}$ *ist normal in* $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Damit ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = N_{\mathbb{Z}/2} \rtimes N_{S_n}$.

Beweis. 1. Es sei

$$X \coloneqq \operatorname{diag}(1, \dots, n, -n, \dots, -1) \in \mathfrak{h}.$$

Da die Einträge von X paarweise verschieden sind wirkt S_{2n}, und damit auch $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$, treu auf dem Orbit $\mathcal{O} \coloneqq S_{2n} \cdot X$. Es sei

$$\omega \cdot X = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, a_1).$$

und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n$ mit

$$\varepsilon_i \coloneqq \operatorname{sgn} a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

Es ist

$$\{\operatorname{sgn}(a_i) a_i \mid i = 1, \dots, n\} = \{1, \dots, n\}.$$

denn ansonsten gebe es $1 \leq i \neq j \leq n$ mit $\operatorname{sgn}(a_i)a_i = \operatorname{sgn}(a_j)a_j$. Dann sind a_i, a_j, $-a_i$ und $-a_j$ vier Diagonaleinträge von $\omega \cdot X$ mit gleichen Betrag. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\omega \cdot X$ aus X durch Permutation der Diagonaleinträge entsteht. Für $\pi \in S_n$ mit

$$\operatorname{sgn}(a_i) a_i = \pi^{-1}(i) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

ist

$$\begin{aligned}
\tau_\pi \cdot X &= \operatorname{diag}(\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n), -\pi^{-1}(n), \dots, -\pi^{-1}(1)) \\
&= \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(a_1)a_1, \dots, \operatorname{sgn}(a_n)a_n, -\operatorname{sgn}(a_n)a_n, \dots, -\operatorname{sgn}(a_1)a_1) \\
&= \sigma_\varepsilon \cdot \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \\
&= \sigma_\varepsilon \cdot \omega \cdot X.
\end{aligned}$$

Weil $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf $\mathcal{O}$ wirkt ist deshalb $\tau_\pi = \sigma_\varepsilon \, \omega$ und somit $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$.

2. Es sei $\omega \in N_{S_n} \cap N_{\mathbb{Z}/2}$. Da $\omega \in N_{S_n}$ permutiert ω die positive Diagonaleinträge von X sowie die negativen Einträge. Insbesondere bleiben die Vorzeichen der Diagonaleinträge von X unter ω erhalten. Für $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n$ mit $\sigma_\varepsilon = \omega$ ist damit $\varepsilon_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Also ist $\varepsilon = 1$ und somit $\omega = \sigma_\varepsilon = \sigma_1 = 1$.

3. Für $\pi \in S_n$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{1, -1\}^n$ ist

$$\begin{aligned}
&\tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_\pi^{-1} \cdot X = \tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_{\pi^{-1}} \cdot X \\
&= \tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \operatorname{diag}(\pi(1), \dots, \pi(n), -\pi(n), \dots, -\pi(1)) \\
&= \tau_\pi \operatorname{diag}(\varepsilon_1 \pi(1), \dots, \varepsilon_n \pi(n), -\varepsilon_n \pi(n), \dots, -\varepsilon_1 \pi(1)) \\
&= \operatorname{diag}(\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \dots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)} n, -\varepsilon_{\pi^{-1}(n)} n, \dots, -\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}) \\
&= \sigma_{(\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \dots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)})} \cdot X.
\end{aligned}$$

Da $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf $\mathcal{O}$ wirkt ist damit $\tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_\pi^{-1} = \sigma_{\varepsilon'}$ für $\varepsilon' \in \{1, -1\}^n$ mit $\varepsilon' = (\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)})$.

□

Es gilt nun $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J)$ zu bestimmen. Für alle $\pi \in S_n$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\pi_J \tau_\pi \pi_J(i) = \pi_J \tau_\pi(2n+1-i) = \pi_J(2n+1-\pi(i)) = \pi(i) = \tau_\pi(i)$$

sowie

$$\pi_J \tau_\pi \pi_J(2n+1-i) = \pi_J \tau_\pi(i) = \pi_J(\pi(i)) = 2n+1-\pi(i) = \tau_\pi(2n+1-i),$$

also ist $N_{S_n} \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. $N_{\mathbb{Z}/2}$ wird von den Transpositionen $(i,\ 2n+1-i)$ mit $1 \le i \le n$ erzeugt, und für jede solche Transposition ist

$$\pi_J(i,\ 2n+1-i)\pi_J = \pi_J(2n+1-i,\ i) = (i,\ 2n+1-i).$$

Also ist auch $N_{\mathbb{Z}/2} \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. Damit ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$ und somit

$$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J) = N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}).$$

Ingesamt haben wir damit die Isomorphismen

$$\begin{aligned} W &= N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = (N_\mathrm{D} \rtimes N_\mathrm{P})/N_\mathrm{D} \\ &\cong N_\mathrm{P} = N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \\ &\cong N_{S_{2n}}(k) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J) = N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = N_{\mathbb{Z}/2} \rtimes N_{S_n} \\ &\cong (\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S_n. \end{aligned}$$

Die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht dabei der Wirkung von $(\mathbb{Z}/2)^n$ auf $\mathfrak{h}$ durch

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \cdot \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, -a_1) \\ &= \mathrm{diag}(\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n, -\varepsilon_n a_n, \ldots, -\varepsilon_1 a_1) \end{aligned}$$

zusammen mit der Wirkung von S_n auf $\mathfrak{h}$ durch

$$\begin{aligned} &\pi \cdot \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, -a_1) \\ &= \mathrm{diag}(a_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \ldots, -a_{\pi^{-1}(1)}). \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Isomorphismus

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n, \ldots, -\lambda_1)$$

ergibt sich für die Wirkung von G auf $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ die Klassifikation halbeinfacher Orbiten

$$\begin{aligned} k^n / ((\mathbb{Z}/2)^n \rtimes S_n) &\to \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{so}_{2n}(k) \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, \\ [(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)] &\mapsto \mathcal{O}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, -\lambda_n, \ldots, -\lambda_1)}, \end{aligned}$$

wobei $(\mathbb{Z}/2)^n$ auf k^n wirkt durch

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \cdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\varepsilon_1 \lambda_1, \ldots, \varepsilon_n \lambda_n)$$

und S_n durch Permutation der Einträge.

2.4 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $SO_{2n}(k)$

Es seien $\mathfrak{g}$, G und $\mathfrak{h}$ wie im vorherigen Abschnitt und

$$SG := \{S \in G \mid \det S = 1\}.$$

Da der Isomorphismus

$$\varphi\colon G \to O_{2n}(k), S \mapsto \Omega S \Omega^{-1}$$

durch Konjugation gegeben ist schränkt er sich zu einem Isomorphismus $SG \cong SO_{2n}(k)$ ein. Wie bereits zuvor induziert der Isomorphismus $\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}_{2n}(k)$ eine Bijektion zwischen den halbeinfachen Orbiten unter SG und unter $SO_{2n}(k)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} N_{SG}(\mathfrak{h}) &= N_G(\mathfrak{h}) \cap SG = \{S \in N_G(\mathfrak{h}) \mid \det S = 1\} \quad \text{sowie analog} \\ Z_{SG}(\mathfrak{h}) &= Z_G(\mathfrak{h}) \cap SG = \{S \in Z_G(\mathfrak{h}) \mid \det S = 1\}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G$. Für $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) \in \mathrm{D}_{2n}(k)$ ist $D^S = \operatorname{diag}(\lambda_{2n}, \ldots, \lambda_1)$, also genau dann $D^{-1} = D^S$, wenn $\lambda_{2n+1-i} = \lambda_i^{-1}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Es folgt, dass

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G = \{\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k^\times\}.$$

Insbesondere ist $\det D = 1$ für alle $D \in N_{\mathrm{D}} = Z_G(\mathfrak{h})$.