Halbeinfache und Nilpotente Orbiten

Jendrik Stelzner

Geboren am 1. September 1992 in Essen

7. Juli 2015

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Catharina Stroppel

Zweitgutachter: Dr. Olaf Schnürer

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eines der klassischen Probleme der linearen Algebra besteht im Verstehen diagonalisierbarer und nilpotenter Endomorphismen. Über endlichdimensionalen Vektorräumen besteht ein klassischer Lösungsansatz darin, nicht Endomorphismen selbst zu betrachten, sondern ihre Konjugationsklassen.

Als eine Verallgemeinerung diagonalisierbarer und nilpotenter Endomorphismen ergibt sich für Lie-Algebren das Konzept ad-halbeinfacher und ad-nilpotenter Elemente. Für eine endlichdimensionale, komplexe, halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ lassen sich diese mithilfe der Jordanzerlegung charakterisieren, und führen somit zum Begriff halbeinfacher und nilpotenter Elemente in $\mathfrak{g}$.

Motiviert von dem Vorgehen in der linearen Algebra ist es naheliegend, die halbeinfachen und nilpotenten Elemente in $\mathfrak{g}$ durch ihre Konjugationsklassen unter der Wirkung einer passenden Gruppe G verstehen zu wollen. Collingwood und McGovern stellen in [**?**] ein solcher Vorgehen dar, wobei sie sich für G einer komplexen Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bedienen.

In dieser Arbeit entwickeln wir einen Zugang zu diesem Vorgehen, der bewusst ohne die Theorie der Lie-Gruppen auskommt. Benötigt wird lediglich ein gewisses Grundwissen über die Darstellungstheorie endlichdimensionaler komplexer Lie-Algebren, wie es sich etwa in [**?**, §1 und §2] findet.

In unserem Vorgehen erinnern wir in Kapitel 1 zunächst an die entsprechenden Grundlagen, wobei wir uns stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0 bewegen. In Kapitel 2 geben wir eine Methode zur Klassifikation halbeinfacher Orbiten in endlichdimensionalen reduktiven Lie-Algebren. Als Anwendung dieser Klassifikation bestimmen wir in Kapitel 3 die halbeinfachen Orbiten in den Lie-Algebren $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter den Konjugationswirkungen von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$, sowie $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$. Zum Abschluss geben wir in Kapitel **??** noch eine Möglichkeit zur Klassifikation nilpotenter Orbiten in reduktiven Lie-Algebren mithilfe von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln, und bestimmen als Beispiel die nilpotenten Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$.

Mein Dank gilt Prof. Catharina Stroppel, die mich auf das Thema dieser Arbeit aufmerksam gemacht hat, und mich während des Erstellens der Arbeit begleitet hat.

1 Vorbereitung

In diesem Kapitel erinnern wir an einige der benötigten Grundlagen aus der Theorie der Lie-Algebren und entwickeln vorbereitende Ergebnisse, die wir in den folgenden Kapiteln anwenden.

Dabei bewegen wir uns in diesem, sowie in allen weiteren Kapiteln, stets über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0. Alle von uns betrachteten Lie-Algebren und Vektorräume befinden sich dabei, sofern nicht anders angegeben, über diesem Grundkörper k, und mit einer Lie-Algebra meinen wir stets eine endlichdimensionale Lie-Algebra.

1.1 Notationen und Grundlagen

Dieser Abschnitt dient in erster Linie zur Einführung von Notationen. In Folge dessen erinnern wir an einige grundlegende Aussagen der Theorie endlichdimensionaler Lie-Algebra, die aber ansonsten als bekannt vorausgesetzt werden. Sofern benötigt finden sich die entsprechenden Details in [**?**, §1 – §3].

1.1.1 Grundlegende Begriffe

Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Menge der ganzen Zahlen, mit $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen, und mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnet $\mathrm{M}_n(k)$ den Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über k. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ bezeichnet

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k)$$

sowie

$$\operatorname{adiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

Insbesondere seien

$$I_n \coloneqq \operatorname{diag}(1, \dots, 1) \in \mathrm{M}_n(k) \quad \text{und} \quad J_n \coloneqq \operatorname{adiag}(1, \dots, 1) \in \mathrm{M}_n(k).$$

Sofern die Größe n klar ist, schreiben wir auch nur I und J. Eine Diagonalmatrix heißt *regulär*, falls ihre Diagonaleinträge paarweise verschieden sind.

Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnet $\mathrm{D}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Eine *Monomialmatrix*, bzw. *verallgemeinerte Permutationsmatrix* ist eine Matrix $S \in \mathrm{M}_n(k)$, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. Monomialmatrizen sind invertierbar und bilden eine Untergruppe $\mathrm{Mon}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$. Es sind $\mathrm{D}_n(k), \mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$ mit

$$\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k),$$

wobei $\rtimes$ das innere semidirekte Produkt mit Normalteiler auf der linken Seite bezeichnet. Diese Zerlegung entspricht einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{D}_n(k) \to \mathrm{Mon}_n(k) \to \mathrm{P}_n(k) \to 0$$

mit Schnitt $\mathrm{P}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{Mon}_n(k)$.

Für einen Vektorraum V bezeichnet $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der k-linearen Automorphismen von V und $\mathrm{SL}(V) = \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det \phi = 1\}$. Ferner bezeichnet $\mathfrak{gl}(V)$ die *lineare Lie-Algebra über* V, d.h. der Vektorraum $\mathrm{End}_k(V)$ zusammen mit dem Kommutator

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f \quad \text{für alle } f, g \in \mathrm{End}_k(V)$$

als Lie-Klammer, und $\mathfrak{sl}(V) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ die Unteralgebra der spurlosen Endomorphismen.

Ein *Homomorphismus* $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ zwischen Lie-Algebren $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ meint stets einen Homomorphismus von Lie-Algebren. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezeichnet $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ die Gruppe der Lie-Algebra-Automorphismen von $\mathfrak{g}$,

$$\operatorname{Aut}\mathfrak{g} = \{\phi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\}.$$

Mit einer *Unteralgebra* von $\mathfrak{g}$ meinen wir stets eine Lie-Unteralgebra.

Die *adjungierte Darstellung* von $\mathfrak{g}$ ist der Homomorphismus

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto (Y \mapsto [X, Y]).$$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ ist nach der Jacobi-Identität für alle $X \in \mathfrak{g}$ eine *Derivation* von $\mathfrak{g}$, d.h.

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)[Y, Z] = [(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)(Y), Z] + [Y, (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X)(Z)] \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Sofern ausreichend klar ist, über welcher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wir uns bewegen, schreiben wir auch nur ad statt $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$.

Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ bezeichnet $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet die *allgemeine lineare Lie-Algebra*, also den Vektorraum $\mathrm{M}_n(k)$ zusammen mit dem Kommutator

$$[A, B] = AB - BA \quad \text{für alle } A, B \in \mathrm{M}_n(k)$$

als Lie-Klammer. Außerdem bezeichnet $\mathfrak{sl}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die *spezielle lineare Lie-Algebra*, d.h. die Unteralgebra der spurlosen Matrizen. Es bezeichnet $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der oberen

Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{u}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der echten oberen Dreiecksmatrizen.

Das *Zentrum* einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist

$$Z(\mathfrak{g}) \coloneqq \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0 \text{ für alle } Y \in \mathfrak{g}\} = \ker \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$$

und bildet ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Für zwei Teilmengen $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$[I,J] \coloneqq \operatorname{span}_k\{[X,Y] \mid X \in I, Y \in J\}.$$

und sind I und J Ideale in $\mathfrak{g}$, so ist nach der Jacobi-Identität auch $[I,J]$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Für $S \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$Z_{\mathfrak{g}}(S) \coloneqq \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0 \text{ für alle } X \in S\}$$

der *Zentralisator* von S in $\mathfrak{g}$, und für ein Element $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathfrak{g}^X \coloneqq Z_{\mathfrak{g}}(X) \coloneqq Z_{\mathfrak{g}}(\{X\}) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X,Y] = 0\}.$$

der *Zentralisator* von X in $\mathfrak{g}$. Nach der Jacobi-Identität ist $\mathbb{Z}_{\mathfrak{g}}(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und somit auch $Z_{\mathfrak{g}}(S) = \bigcap_{X \in \mathfrak{g}} Z_{\mathfrak{g}}(X)$ für alle $S \subseteq \mathfrak{g}$.

Die *Killing-Form* $\kappa_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist definiert als

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X,Y) \coloneqq \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Die Killing-Form ist eine symmetrische Bilinearform, und in dem Sinne *assoziativ*, dass

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(X,[Y,Z]) = \kappa_{\mathfrak{g}}([X,Y],Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Sofern ausreichend klar ist, über welcher Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wir uns bewegen, schreiben wir auch nur κ statt $\kappa_{\mathfrak{g}}$.

Das *Radikal* von $\mathfrak{g}$ ist das eindeutige maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$, und wird mit $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ bezeichnet. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach* falls eine, und damit alle, der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = 0$,
2. $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ für einfache Ideale $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathfrak{g}$,
3. $\kappa_{\mathfrak{g}}$ ist nicht-entartet.

Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Siehe [**?**, §5.1, §5.2] für die entsprechenden Beweise.

$\mathfrak{sl}_n(k)$ ist für alle $n \geq 1$ einfach, und damit insbesondere halbeinfach, und die *triviale Lie-Algebra* 0 ist ebenfalls halbeinfach. Bis auf Isomorphie gibt es genau eine eindimensionale Lie-Algebra sowie zwei zweidimensional Lie-Algebren, und diese sind alle auflösbar; daher ist jede halbeinfache, nicht-triviale Lie-Algebren mindestens dreidimensional.

Eine *Darstellung* einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum V zusammen mit einem Homomorphismus $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Eine $\mathfrak{g}$-*Modulstruktur* auf V ist eine bilineare Abbildung $g \times V \to V, (X, v) \mapsto X \cdot v$, für die

$$[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g} \text{ und } v \in V. \tag{1}$$

Darstellungen von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}$-Moduln sind in dem Sinne äquivalent, dass es eine Bijektion

$$\left\{ \rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) \;\middle|\; \begin{array}{c}\rho \text{ ist ein Ho-}\\ \text{momorphismus}\end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{r}\Phi\colon \mathfrak{g} \times V \to V,\\ (X, v) \mapsto X \cdot v\end{array} \;\middle|\; \Phi \text{ erfüllt (1)} \right\}$$
$$\rho \mapsto ((X, v) \mapsto \rho(X)(v))$$
$$(X \mapsto (v \mapsto X \cdot v)) \leftarrow\!\shortmid \Phi$$

gibt. Wir werden daher im Folgenden nicht zwischen den beiden Konzepten unterscheiden.

Ein grundlegendes Resultat über die Darstellungstheorie halbeinfache Lie-Algebren ist der Satz von Weyl, ein Beweis findet sich in [**?**, §6.3].

Theorem 1.1 (Weyl)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und V eine endlichdimensionale Darstellung, so ist V halbeinfach, d.h. V ist die direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen.*

1.1.2 Lie-Algebra einer Bilinearform

Definition 1.2. Ist V ein Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to k$ eine Bilinearform, so seien

$$\mathfrak{o}(V, \beta) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \beta(f(v), w) + \beta(v, f(w)) = 0 \text{ für alle } v, w \in V\}$$

und

$$\mathrm{O}(V, \beta) := \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(\phi(v), \phi(w)) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so seien

$$\mathfrak{o}(B) := \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^\top B + BA = 0\}$$

und

$$\mathrm{O}(B) := \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^\top BS = B\}.$$

Bemerkung 1.3. Unter der natürlichen Wirkung von $\mathfrak{gl}(V)$ auf $(V \otimes V)^*$ ist

$$\mathfrak{o}(V, \beta) = \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid f \cdot \beta = 0\}.$$

Ist V ein Vektorraum mit Bilinearform $\beta\colon V \times V \to k$, so wirkt $\mathrm{O}(V, \beta)$ durch Konjugations auf $\mathfrak{o}(V, \beta)$, und für alle $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so wirkt $\mathrm{O}(B)$ per Konjugation auf $\mathfrak{o}(B)$.

Ist V zusätzlich endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, so wird β bezüglich $\mathcal{B}$ durch eine Matrix $B \in \mathrm{M}_n(k)$ dargestellt. Durch $\mathcal{B}$ ergibt sich ein Isomorphismus

$\Phi_{\mathcal{B}}\colon \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}_n(k)$, der jedem Endomorphismus seine darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ zuordnet. Unter diesem Endomorphismus korrespondieren die Unteralgebren $\mathfrak{o}(V,\beta)$ und $\mathfrak{o}(B)$, und unter dem induzierten Isomorphismus $\phi_{\mathcal{B}}\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_n(k)$ korrespondiert $\mathrm{O}(V,\beta)$ zu $\mathrm{O}(B)$.

Die Konjugationswirkung von $\mathrm{O}(V,\beta)$ auf $\mathfrak{o}(V,\beta)$ und die Konjugationswirkung von $\mathrm{O}(B)$ auf $\mathfrak{o}(B)$ sind mit den obigen Isomorphismen $\Phi_{\mathcal{B}}$ und $\phi_{\mathcal{B}}$ in dem Sinne verträglich, dass

$$\phi_{\mathcal{B}}(s) \cdot \Phi_{\mathcal{B}}(f) = \phi_{\mathcal{B}}(s \cdot f) \quad \text{für alle } s \in G(V,\beta) \text{ und } f \in \mathfrak{o}(V,\beta).$$

Ist $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V, so wird β bezüglich $\mathcal{C}$ durch eine Matrix $C \in \mathrm{M}_n(k)$ beschrieben. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ induziert einen Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := \Phi_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\colon \mathfrak{o}(B) \to \mathfrak{o}(C), \quad A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}$$

und einen Isomorphismus von Gruppen

$$\phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := \phi_{\mathcal{C}}\phi_{\mathcal{B}}^{-1}\colon \mathrm{O}(B) \to \mathrm{O}(C), \quad S \mapsto \Gamma S \Gamma^{-1},$$

wobei $\Gamma \in \mathrm{M}_n(k)$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ bezeichnet (d.h. die i-te Spalte von Γ sind die Koordinaten von v_i bezüglich $\mathcal{C}$). Auch $\Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $\phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ sind mit der Konjugationswirkung verträglich in dem Sinne mit, dass

$$\phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(S) \cdot \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(A) = \Phi_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(S \cdot A) \quad \text{für alle } S \in \mathrm{O}(B) \text{ und } A \in \mathfrak{o}(B).$$

Ein Beweis der folgenden Proposition findet sich in [**?**, S. 301].

Proposition 1.4. *Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und β eine nicht-entartete, symmetrische oder alternierende Bilinearform auf V. Ist $n = 2$ und β symmetrisch, so ist $\mathfrak{o}(V,\beta)$ eindimensional und damit abelsch. Ansonsten ist $\mathfrak{o}(V,\beta)$ halbeinfach.*

Korollar 1.5. *Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$ invertierbar, sowie symmetrisch oder schief-symmetrisch. Ist $n = 2$ und B symmetrisch, so ist $\mathfrak{o}(B)$ eindimensional und damit abelsch. Ansonsten ist $\mathfrak{o}(B)$ halbeinfach.*

Beispiel 1.6. 1. Für die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{M}_n(k)$ ist

$$\mathfrak{so}_n(k) := \mathfrak{o}(I) = \{A \in \mathrm{M}_n(k) \mid A^\top = -A\}.$$

Es ist $\mathfrak{so}_1(k) = 0$, $\mathfrak{so}_2(k)$ ist eindimensional und abelsch, und für $n \geq 3$ ist $\mathfrak{so}_n(k)$ halbeinfach.

2. Für

$$\Omega = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$

ist

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) := \mathfrak{o}(\Omega) = \{A \in \mathrm{M}_{2n}(k) \mid A^\top\Omega + \Omega A = 0\}$$

für alle $n \geq 1$ halbeinfach. Durch eine Zerlegung in $(n \times n)$-Blockmatrizen ergibt sich, dass für alle $n \geq 1$

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^\top \end{pmatrix} \middle| P, Q, R \in \mathrm{M}_n(k), Q^\top = Q, R^\top = R \right\}.$$

Wir führen noch die folgende Notation ein: Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so ist

$$\mathrm{SO}(B) \coloneqq \{S \in \mathrm{O}(B) \mid \det S = 1\}.$$

1.2 Jordanzerlegung

In diesem Abschnitt wiederholen wir die grundlegende Theorie der Jordanzerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren, wobei wir zunächst an die Jordanzerlegung von Endomorphismen erinnern.

Definition 1.7. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $X \in \mathrm{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.8. $X \in \mathrm{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder X-invariante Untervektorraum ein X-invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $X \in \mathrm{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $X_s \in \mathrm{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $X_n \in \mathrm{End}_k(V)$. Ein Beweis findet sich in [**?**, §4.2]

Proposition 1.9 (Konkrete Jordanzerlegung)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $X \in \mathrm{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige $X_s, X_n \in \mathrm{End}_k(V)$, so dass*
   a) *$X = X_s + X_n$,*
   b) *X_s ist halbeinfach und X_n nilpotent,*
   c) *X_s und X_n kommutieren.*
2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, so dass $X_s = P(X)$ und $X_n = Q(X)$. Insbesondere kommutiert $Y \in \mathrm{End}_k(V)$ genau dann mit X, wenn Y mit X_s und X_n kommutiert.*
3. *Für Untervektorräume $U \subseteq W \subseteq V$ mit $X(W) \subseteq U$ ist auch $X_s(W) \subseteq U$ und $X_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.10. Ist $X \in \mathrm{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $X = X_s + X_n$ aus Proposition 1.9 die *konkrete Jordanzerlegung* von X. Dabei ist X_s ist der *halbeinfache Teil* von X und X_n der *nilpotente Teil* von X. Ist $X = X_s$, also X halbeinfach, so heißt X auch *konkret halbeinfach*, und ist $X = X_n$, also X nilpotent, so heißt X auch *konkret nilpotent*.

Bemerkung 1.11. Analog zu Definition 1.7 sind halbeinfache Elemente in $\mathrm{M}_n(k)$ definiert, und Proposition 1.9, sowie die daraus resultierende konkrete Jordanzerlegung aus Definition 1.10, verallgemeinern sich ebenso auf $\mathrm{M}_n(k)$.

Bemerkung 1.12. Es sei $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ oder $X \in \mathfrak{gl}(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V. Ist X halbeinfach, bzw. nilpotent, so heißt X auch

Wir wollen das Konzept eines halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementes auf Lie-Algebren verallgemeinern, wobei wir uns zunächst auf halbeinfache Lie-Algebren beschränken. Entscheidend hierfür ist der Begriff eines ad-halbeinfachen, bzw. ad-nilpotenten Elementes.

Definition 1.13. Ein Element X einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ad-*halbeinfach*, bzw. ad-*nilpotent*, falls $\operatorname{ad} X$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.14. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra.

Ist $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist X auch ad-halbeinfach. Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von X, wobei v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned}
[X, E_{ij}](v_k) &= X E_{ij}(v_k) - E_{ij} X(v_k) = \delta_{jk} X(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\
&= \lambda_i \delta_{jk} v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_k) \delta_{jk} v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_j) \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}(v_k),
\end{aligned}$$

und somit

$$[X, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Es ist also $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X \in \operatorname{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach. Damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X)|_{\mathfrak{g}}$ halbeinfach.

Ist $X \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist X auch ad-nilpotent. Es ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X = \lambda_X - \rho_{-X}$, wobei λ_X die Linksmultiplikation mit X bezeichnet und ρ_{-X} die Rechtsmultiplikation mit $-X$. Da X nilpotent ist, sind es auch λ_X und ρ_{-X}. Da λ_X und ρ_{-X} kommutieren ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X$ nilpotent. Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X)|_{\mathfrak{g}}$ nilpotent.

Analog ergibt sich für eine Unteralgebra $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$, dass halbeinfache $X \in \mathfrak{g}$ ebenfalls ad-halbeinfach sind, und nilpotente X ebenfalls ad-nilpotent.

Das nächste Lemma erlaubt es uns, die konkrete Jordanzerlegung auf Unteralgebren einzuschränken, sofern diese halbeinfach sind. Ein Beweis findet sich in [**?**, §6.4].

Lemma 1.15. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra, so enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist $\mathfrak{g}$ eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma die Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Proposition 1.16 (Abstrakte Jordanzerlegung)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $X \in \mathfrak{g}$ eindeutige $X_s, X_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $X = X_s + X_n$,
2. X_s *ist* ad-*halbeinfach und* X_n *ist* ad-*nilpotent,*
3. X_s *und* X_n *kommutieren.*

X_s und X_n sind eindeutig dadurch bestimmt, dass

$$\operatorname{ad}(X_s) = (\operatorname{ad} X)_s \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(X_n) = (\operatorname{ad} X)_n$$

Ein Element $Y \in \mathfrak{g}$ kommutiert genau dann mit X, wenn Y mit X_s und X_n kommutiert.

Definition 1.17. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $X = X_s + X_n$ aus Proposition 1.16 die *(abstrakte) Jordanzerlegung* von X. Dabei ist X_s ist der *halbeinfache Teil* von X und X_n der *nilpotente Teil* von X. Ferner heißt X *halbeinfach*, falls $X = X_s$, und *nilpotent* falls $X = X_n$.

Bemerkung 1.18. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $X \in \mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn X ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist $\mathfrak{g}$ linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen. Dementsprechend werden wir in diesem Fall nicht zwischen konkreter und abstrakter Jordanzerlegung unterscheiden.

Da für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Isomorphismus $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ mit der abstrakten und konkreten Jordan verträglich ist, ergibt sich zusammen mit [**?**, Korollar 6.4] die Funktorialität der Jordanzerlegung.

Lemma 1.19 (Funktorialität der Jordanzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei halbeinfache Lie-Algebren und $X \in \mathfrak{g}_1$ mit Jordanzerlegung $X = X_s + X_n$. Ist $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus, so ist $\phi(X_s) = \phi(X)_s$ und $\phi(X_n) = \phi(X)_n$.*

Wir halten schließlich noch das folgende nützliches Ergebnis fest.

Lemma 1.20. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$* ad-*halbeinfach und $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda$ die Eigenraumzerlegung von $\operatorname{ad} X$. Dann ist $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ für alle $\lambda, \mu \in k$.*

Beweis. Für $Y_1 \in \mathfrak{g}_\lambda$ und $Y_2 \in \mathfrak{g}_\mu$ ist nach der Jacobi-Identität

$$[X, [Y_1, Y_2]] = [[X, Y_1], Y_2] + [Y_1, [X, Y_2]] = \lambda[Y_1, Y_2] + \mu[Y_1, Y_2] = (\lambda + \mu)[Y_1, Y_2],$$

also $[Y_1, Y_2] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. $\square$

1.3 $\mathfrak{sl}_2$-Theorie

Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist die kleinste nicht-triviale halbeinfache Lie-Algebra, und die Klassifikation der endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist ein klassisches und mächtiges Hilfsmittel zur Untersuchung halbeinfacher Lie-Algebren. Beweise der folgenden Aussagen finden sich in [**?**, §7].

Definition 1.21. Die *Standardbasis* (e, h, f) *von* $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist gegeben durch

$$e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Standardbasis von $\mathfrak{sl}_2(k)$ gilt

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f \quad \text{und} \quad [e, f] = h.$$

Ist V eine Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$, so schreiben wir

$$V_\lambda := \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\} \quad \text{für alle } \lambda \in k.$$

Eine der fundamentalen Erkenntnisse über $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist die Klassifikation der endlichdimensionalen, irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$.

Proposition 1.22. *Für jedes $n \geq 1$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine n-dimensionale irreduzible Darstellung V^n von $\mathfrak{sl}_2(k)$. Dabei ist*

$$V^n = V^n_{-n+1} \oplus V^n_{-n+3} \oplus \cdots \oplus V^n_{n-3} \oplus V^n_{n-1}$$

mit $\dim V^n_i = 1$ *für alle $i = -n+1, -n+3, \ldots, n-1$. Die Basiselemente e und f von $\mathfrak{sl}_2(k)$ wirken auf V^n durch*

$$e \cdot V^n_\lambda = \begin{cases} V^n_{\lambda+2} & \text{falls } \lambda \neq -d-1, \\ 0 & \text{falls } \lambda = -d-1, \end{cases} \quad \text{und} \quad f \cdot V^n_\lambda = \begin{cases} V^n_{\lambda-2} & \text{falls } \lambda \neq d+1, \\ 0 & \text{falls } \lambda = d+1. \end{cases}$$

Insbesondere gibt es eine Basis $b_{-n+1}, b_{-n+3} \ldots, b_{n-1} \in V^n$ mit $b_i \in V_i$ für alle $i = -n+1, \ldots, n-1$, sowie

$$e \cdot b_i = \begin{cases} b_{i+2} & \text{für } i = -n+1, \ldots, n-3, \\ 0 & \text{für } i = n-1. \end{cases}$$

Da nach dem Satz von Weyl jede endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ halbeinfach ist, lassen sich damit alle endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(k)$ verstehen.

Korollar 1.23. *Es sei eine V eine endlichdimensionale Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$. Dann gibt es eine Zerlegung $V = \bigoplus_{d \geq 1} \bigoplus_{i=1}^{\nu_d} W^{d,i}$ in irreduzible Unterdarstellungen $W^{d,i}$* *mit* $\dim W^{d,i} = d$. *Für alle $d \geq 1$ und $i = 1, \ldots, \nu_d$ ist dann*

$$W^{d,i} = W^{d,i}_{-d+1} \oplus W^{d,i}_{-d+3} \oplus \cdots \oplus W^{d,i}_{d-3} \oplus W^{d,i}_{d-1},$$

wobei alle Summanden eindimensional sind, und somit auch $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ *mit*

$$V_n = \bigoplus_{d\geq 1}\bigoplus_{i=1}^{\nu_d} W_n^{d,i} = \bigoplus_{\substack{p\geq 0\\ d=|n|+1+2p}} \bigoplus_{i=1}^{\nu_d} \underbrace{W_n^{d,i}}_{1\text{-}dim.}$$

Insbesondere ist $\dim V_n = \bigoplus_{p\geq 0, d=|n|+1+2p} \nu_d$ *und* $\dim V_n = \dim V_{-n}$ *für alle* $n \geq 0$*, sowie* $\dim V = \dim V_0 + \dim V_1$*. Zudem ist* $\nu_d = \dim V_{d-1} - \dim V_{d+1}$ *für alle* $d \geq 1$*.*

Insbesondere sind die Zahlen ν_d*,* $d \geq 1$*, eindeutig. Ist* U *eine weitere endlichdimensionale Darstellung von* $\mathfrak{sl}_2(k)$ *mit Zerlegung* $U = \bigoplus_{d\geq 1}\bigoplus_{i=1}^{\mu_d} \overline{W}^{d,i}$ *in irreduzible Unterdarstellungen, so sind* V *und* U *genau dann isomorph, wenn* $\nu_d = \mu_d$ *für alle* $d \geq 0$*.*

Proposition 1.22 lässt sich auch nutzen, um einen endlichdimensionalen Vektorraum die zusätzliche Struktur einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ zu geben.

Lemma 1.24. *Es sei* V *ein endlichdimensionaler Vektorraum mit* $d \coloneqq \dim V \geq 1$*. Es sei* $(b_{-d+1}, b_{-d+3}, \dots, b_{d-3}, b_{d-1})$ *eine Basis von* V*. Dann lässt sich* V *die Struktur einer irreduziblen Darstellung von* $\mathfrak{sl}_2(k)$ *geben, so dass*

$$h \cdot b_i = i b_i \quad \textit{für alle } i = -d+1, -d+3, \dots, d-3, d-1, \quad \textit{und}$$
$$e \cdot b_i = \begin{cases} b_{i+2} & \textit{für } i = -d+1, -d+3, \dots, d-3, \\ 0 & \textit{für } i = d-1. \end{cases}$$

1.4 Cartan-Unteralgebren und Wurzelraumzerlegung

In diesem Abschnitt erinnern wir an das grundlegende Konzept einer Cartan-Unteralgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra. Wir erläutern das Zustandekommen der resultierenden Wurzelraumzerlegung und halten einige ihrer elementaren Eigenschaften fest.

Definition 1.25. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *toral* falls $\mathfrak{h}$ aus ad-halbeinfachen Elementen besteht.

Beispiel 1.26. 1. Die Unteralgebra der Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ besteht aus halbeinfachen Elementen (in der Sinne der konkreten Jordanzerlegung) und damit aus ad-halbeinfachen Elementen.

2. Nach gleicher Argumentation ist $\mathfrak{h} \coloneqq \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{d}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{t}_n(k)$.

3. Ist allgemeiner $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' \coloneqq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$: Für jedes $X \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ halbeinfach, und somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{g}'}$.

In jedem der obigen Beispiele ist die torale Unteralgebra abelsch. Wie in [**?**, §8.1] gezeigt wird, ist dies kein Zufall.

Lemma 1.27. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Diese Kommutativität hat entscheidende Konsequenzen für die adjungierte Darstellung einer toralen Unteralgebra: Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \subseteq \mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ mit

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X \text{ für alle } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Die Elemente $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ spielen eine bedeutend Rolle bei der Untersuchung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{h}$.

Definition 1.28. Für eine torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sei

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

In halbeinfachen Lie-Algebren, in denen (ad)-halbeinfache Elemente mithilfe der Jordanzerlegung verstanden werden können, spielen maximale torale Unteralgebren eine besondere Rolle.

Definition 1.29. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ heißen *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Bemerkung 1.30. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so ist jedes halbeinfache Element von $\mathfrak{g}$ in einer CSA enthalten. Mit dem halbeinfachen Element $0 \in \mathfrak{g}$ ergibt sich damit, dass $\mathfrak{g}$ eine CSA enthält.

Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra mit CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$, da $\mathfrak{h}$ abelsch ist. Wie in [**?**, §8.2] ergibt sich auch die Umkehrung.

Lemma 1.31. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich mit den Wurzeln $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ damit eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Definition 1.32. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist die *Wurzelraumzerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Die Räume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind die entsprechenden *Wurzelräume*

Beispiel 1.33. Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ die Unteralgebra der spurlosen Diagonalmatrizen. Aus Beispiel 1.26 ist $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, und es handelt sich bereits um eine CSA.

Um dies zu sehen sei $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. $\mathfrak{h}'$ besteht aufgrund der Übereinstimmung der konkreten und abstrakten Jordanzerlegung aus halbeinfachen Elementen. Da $\mathfrak{h}'$ abelsch ist, sind die Elemente aus $\mathfrak{h}'$ simultan diagonalisierbar. Es gibt also $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$. Die Konjugation mit S ist ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist unter dem $\mathfrak{g}$ invariant ist, der sich also zu einem Automorphismus von $\mathfrak{g}$ einschränken lässt. Daher ist $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{h}$, woraus wegen der Maximalität von $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ folgt, dass $\mathfrak{h} = S\mathfrak{h}'S^{-1}$. Da es eine CSA in $\mathfrak{sl}_n(k)$ gibt, ist damit auch $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{sl}_n(k)$

Für $X = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{h}$ ist

$$[X, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n,$$

wobei $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ die Standardbasis von $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet. Für $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ mit

$$\varepsilon_i(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

ist daher

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = kE_{ij} \quad \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Damit ergeben sich für $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ die Wurzeln

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

und die Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} kE_{ij}.$$

In diesem Beispiel zeigen sich bereits einige elementare Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung, die wir hier noch festhalten wollen. Beweise finden sich in [**?**, §8.3 – §8.5].

Proposition 1.34 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. *Φ erzeugt $\mathfrak{h}^*$ als k-Vektorraum.*
2. *Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ eine k-Basis von $\mathfrak{h}^*$, so ist $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*
3. *Für alle $\alpha \in \Phi$ ist $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.*
4. *Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind eindimensional und $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.*
5. *Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ ist*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \\ \subseteq \mathfrak{h} & \text{falls } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

6. *Ist $\alpha \in \Phi$, so ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ eindimensional und $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$.*
   Insbesondere gibt es ein eindeutiges $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(H_\alpha) = 2$ und $kH_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$, und
   $$S_\alpha \coloneqq \mathfrak{g}_\alpha \oplus kH_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$
   ist eine Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.5 Reduktive Lie-Algebren

Reduktive Lie-Algebren entstehen durch das Hinzufügen eines Zentrums zu einer halbeinfachen Lie-Algebra, und sind eine Verallgemeinerung der solchen. Die Lie-Algebra-Struktur einer reduktiven Lie-Algebra ist durch die zugrundelegende halbeinfache Lie-Algebra bereits eindeutig bestimmt. Dies führt dazu, dass sich viele Konzepte und Aussagen aus der Theorie halbeinfacher Lie-Algebren direkt auf reduktive verallgemeinern lassen.

1.5.1 Definition

Lemma 1.35. *Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *für ein abelsches Ideal* $\mathfrak{a}$ *und ein halbeinfaches Ideal* $\mathfrak{s}$.
3. *Die adjungierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
4. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt in 2 bereits $\mathfrak{a} = Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Beweis. ($4 \Rightarrow 3$) $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ist halbeinfach als Lie-Algebra, da

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb $\mathfrak{g}$ halbeinfach als $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})$-Modul
($3 \Rightarrow 2$) Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Als Lie-Algebren sind die $\mathfrak{a}_i$ damit abelsch und die $\mathfrak{s}_j$ einfach. Also ist $\mathfrak{a} \coloneqq \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
($2 \Rightarrow 1$) Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.
($1 \Rightarrow 4$) Es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \operatorname{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \operatorname{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. □

Definition 1.36. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.35 erfüllt.

Bemerkung 1.37. Nach Lemma 1.35 ist die Zerlegung einer reduktiven Lie-Algebra in eine abelsches und halbeinfaches Ideal eindeutig.

Beispiel 1.38. 1. Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

2. $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, denn es gilt $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit Zerlegung $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

3. Die oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{t}_n(k)$ sind für $n \geq 2$ nicht reduktiv. Zum einen ist $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \mathfrak{u}_n(k)$, aber $\mathfrak{t}_n(k) \neq kI \oplus \mathfrak{u}_n(k)$. Zum anderen ist auch $\operatorname{rad} \mathfrak{t}_n(k) = \mathfrak{t}_n(k) \neq kI = Z(\mathfrak{t}_n(k))$.

Das Beispiel $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ zeigt auch, dass Unteralgebren reduktiver Lie-Algebren nicht notwendigerweise selber reduktiv sind.

Die Zerlegung einer reduktiven Lie-Algebra in ihr Zentrum und ihren halbeinfachen Teil ist in gewissem Rahmen mit Homomorphismen verträglich.

Lemma 1.39. *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei reduktive Lie-Algebren mit $\mathfrak{s}_1 \coloneqq [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ und $\mathfrak{s}_2 \coloneqq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. Ist $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus, so ist $\phi(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}_2$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{s}_1 = [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]$, da $\mathfrak{s}_1$ halbeinfach ist. Also ist

$$\phi(\mathfrak{s}_1) = \phi([\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]) = [\phi(\mathfrak{s}_1), \phi(\mathfrak{s}_1)] \subseteq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{s}_2. \qquad \square$$

Bemerkung 1.40. Die analoge Aussage für die Zentren von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gilt im Allgemeinen nicht. So ist etwa die Inklusion $\mathfrak{d}_2(k) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(k)$ ein Homomorphismus, aber $Z(\mathfrak{d}_2(k)) = \mathfrak{d}_2(k) \subsetneq kI = Z(\mathfrak{gl}_2(k))$.

1.5.2 Halbeinfache und Nilpotente Elemente

Wir wollen auch das Konzept halbeinfacher und nilpotenter Elemente auf reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

In $\mathrm{M}_n(k)$, sowie $\operatorname{End}_k(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V, sind die halbeinfachen und nilpotenten Elemente über die konkrete Jordanzerlegung charakterisiert. In einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind halbeinfache und nilpotente Elemente durch die adjungierte Darstellung charakterisiert, über die sich aus der konkreten Jordanzerlegung in $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ die abstrakte Jordanzerlegung in $\mathfrak{g}$ ergibt.

Die verschiedenen Konzepte von Halbeinfachheit und Nilpotenz in $\mathfrak{g}$ sind miteinander verträglich: $X \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn X ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist. Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so stimmen diese Begriffe außerdem mit denen der konkreten Jordanzerlegung überein.

Für eine reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ entsteht das Problem, dass $Z(\mathfrak{g})$ nicht notwendigerweise trivial ist. Insbesondere sind die Element in $Z(\mathfrak{g})$ sowohl ad-halbeinfach als auch ad-nilpotent. Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so können wir halbeinfache und nilpotente Element in $\mathfrak{g}$ deshalb nicht notwendigerweise über die adjungierte Darstellung beschreiben.

Beispiel 1.41. Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in k \right\}$$

ist abelsch, da sich eine Basis aus zwei kommutierendenden Elementen hat, und ist damit reduktiv. Da die adjungierte Darstellung trivial ist können wir über sie keine Rückschlüsse auf einzelne Elemente in $\mathfrak{g}$ ziehen. Insbesondere liefert die adjungierte Darstellung *keine* Aussagen über Halbeinfachheit und Nilpotenz eines Elementes in $\mathfrak{g}$.

Im Allgemeinen dürfen wir also nicht darauf hoffen, die halbeinfachen und nilpotenten Elemente einer linearen reduktiven Lie-Algebra über die adjungierte Darstellung charakterisieren zu können.

Um ein Konzept von halbeinfachen und nilpotenten Elementen in einer reduktiven Lie-Algebra zu entwickeln, charakterisieren wir zunächst ad-halbeinfache und ad-nilpotente Elemente über die zugrundeliegende halbeinfache Lie-Algebra.

Lemma 1.42. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra mit $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es sei $X \in \mathfrak{g}$ mit Zerlegung $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann gilt:*

1. *X genau dann* ad*-halbeinfach, bzw.* ad*-nilpotent, wenn $X_2 \in \mathfrak{s}$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist (im Sinne der abstrakten Jordanzerlegung in $\mathfrak{s}$).*
2. *Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so ist dies außerdem äquivalent dazu, dass X_2 konkret halbeinfach, bzw. konkret nilpotent ist.*

Beweis. Bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}.$$

Deshalb ist X genau dann $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfach, bzw. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent, wenn X_2 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}$-halbeinfach, bzw. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}$-nilpotent ist. Der zweite Teil der Aussage folgt aus der Übereinstimmung der abstrakten und konkreten Jordanzerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren. ☐

Ist also $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so deren Zentrum sich gut genug verhält, so können wir deshalb die halbeinfachen und nilpotenten Elemente über die adjungierte Darstellung charakterisieren.

Lemma 1.43. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so dass $Z(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Dann gilt für alle $X \in \mathfrak{g}$:*

1. *X ist genau dann halbeinfach, wenn X* ad*-halbeinfach ist.*
2. *X ist genau dann nilpotent, wenn X* ad*-nilpotent ist und $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

1. Ist X halbeinfach, so ist X nach Beispiel 1.14 auch ad-halbeinfach. Andererseits sei $X \in \mathfrak{g}$ ad-halbeinfach mit Zerlegung $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Lemma 1.42 ist X_2 halbeinfach. Da $X_1 \in Z(\mathfrak{g})$ kommutieren X_1 und X_2 auch miteinander. Somit ist X als Summe zweier kommutierender, halbeinfacher Elemente selbst halbeinfach.

2. Ist X $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent mit $X \in \mathfrak{s}$, so ist X nach Lemma 1.42 nilpotent.

   Es sei andererseits X nilpotent. Dann ist X nach Beispiel 1.14 insbesondere ad-nilpotent und es gilt zu zeigen, dass $X \in \mathfrak{s}$. Es sei $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Annahme ist X_1 halbeinfach. Nach Lemma 1.42 folgt aus der ad-Nilpotenz von X, dass X_2 nilpotent ist. Da $X_1 \in Z(\mathfrak{g})$ kommutieren X_1 und X_2 miteinander. Damit erfüllen X_1 und X_2 alle Eigenschaften der konkreten Jordanzerlegung von X, wobei X_1 der halbeinfach Teil von X und X_2 der nilpotente Teil von X ist. Da X nilpotent ist gilt bereits $X = X_2 \in \mathfrak{s}$. □

Dies motiviert die Definition halbeinfacher und nilpotenter Elemente in einer beliebigen reduktiven Lie-Algebra.

Definition 1.44. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra. Ein Element $X \in \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn es ad-halbeinfach ist. X heißt *nilpotent*, wenn $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und X ad-nilpotent ist. Gegebenenfalls wird X auch *abstrakt halbeinfach*, bzw. *abstrakt nilpotent* genannt.

Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so haben wir bereits in Beispiel 1.41 gesehen, dass die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente nicht notwendigerweise mit den konkret halbeinfachen, bzw. konkret nilpotenten Elementen übereinstimmen. Ob sie übereinstimmen, hängt nach Lemma 1.43 allein von $Z(\mathfrak{g})$ ab.

Korollar 1.45. *Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so stimmen die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente genau dann mit den konkret halbeinfach, bzw. konkret nilpotenten überein, wenn $Z(\mathfrak{g})$ aus konkret halbeinfachen Elementen besteht.*

Beweis. Besteht $Z(\mathfrak{g})$ aus konkret halbeinfachen Elementen, so sind die abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elemente nach Lemma 1.43 bereits konkret halbeinfach, bzw. konkret nilpotent.

Andererseits besteht $Z(\mathfrak{g})$ aus abstrakt halbeinfachen Elementen, und sofern diese mit den konkret halbeinfachen übereinstimmen, somit auch aus konkret halbeinfachen. □

So wie wir für lineare halbeinfache Lie-Algebren nicht zwischen der abstrakten und konkreten Jordanzerlegung unterscheiden, werden wir für lineare reduktive Lie-Algebren wie in Lemma 1.43 auch nicht zwischen abstrakt halbeinfachen, bzw. abstrakt nilpotenten Elementen und konkret halbeinfachen, bzw. konkret nilpotenten unterscheiden.

Bemerkung 1.46. Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so geht aus dem Beweis von Lemma 1.43 geht hervor, dass alle abstrakt nilpotenten Elemente von $\mathfrak{g}$ bereits konkret nilpotent sind, und alle konkret halbeinfachen Elemente auch abstrakt nilpotent.

Beispiel 1.47. 1. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$, weshalb Definition 1.44 mit den Begriffen der abstrakten Jordanzerlegung übereinstimmt.

2. Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare halbeinfache Lie-Algebra, so ist stimmt Definition 1.44 deshalb auch mit der konkreten Jordanzerlegung überein.

3. Da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ stimmt Definition 1.44 mit der konkreten Jordanzerlegung und somit dem üblichen Konzept halbeinfacher und nilpotenter Element überein.

4. Die Lie-Algebra
$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$
ist abelsch, weshalb $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ nicht aus konkret halbeinfachen Elementen besteht, stimmt Definition 1.44 *nicht* mit der konkreten Jordanzerlegung überein.

1.5.3 Cartan-Unteralgebren

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff einer Cartan-Unteralgebra auf reduktive Lie-Algebren und untersuchen, wie die Cartan-Unteralgebren einer reduktiven Lie-Algebra mit denen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zusammenhängen.

Definition 1.48. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ und die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind die *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Bemerkung 1.49. 1. Eine CSA einer reduktiven Lie-Algebra besteht aus halbeinfachen Elementen und ist maximal mit dieser Eigenschaft.

2. Jedes halbeinfache Element $X \in \mathfrak{g}$ ist in einer CSA enthalten; es ist nämlich $kX \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, und diese ist in einer toralen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von maximaler Dimension enthalten. Wegen dieser Maximalität der Dimension ist $\mathfrak{h}$ bereits maximal unter den toralen Unteralgebren.

3. Insbesondere ergibt sich mit $X = 0$, dass in jeder reduktiven Lie-Algebra CSA existieren.

Beispiel 1.50. 1. Ist $\mathfrak{g}$ eine abelsche Lie-Algebra, so ist $\mathfrak{g}$ selbst die eindeutige CSA in $\mathfrak{g}$.

2. $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ ist nach Beispiel 1.14 eine torale Unteralgebra. Da $\mathfrak{d}_n(k)$ nach Korollar 1.45 aus halbeinfachen Elementen besteht, ergibt sich analog zu Beispiel 1.33, dass $\mathfrak{d}_n(k)$ bereits eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist; es ergibt sich ebenfalls analog, dass alle CSA in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zu $\mathfrak{d}_n(k)$ sind.

Um die CSA einer reduktiven Lie-Algebra zu verstehen, genügt es, die CSA der zugrundeliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zu verstehen. Genauer gilt die folgende Korrespondenz:

Lemma 1.51. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra,* $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ *und* $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{CSA \text{ } in \text{ } \mathfrak{g}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{CSA \text{ } in \text{ } \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$. Denn es ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra, und da $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Denn $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf $\mathfrak{a}$ und halbeinfach auf $\mathfrak{s}$, und somit halbeinfach auf $\mathfrak{g}$. Also ist X halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra. Denn als Schnitt zweier Unteralgebren ist $\mathfrak{h}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und damit auch von $\mathfrak{s}$. Für $X \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$-invariant, also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.

4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA. Denn $\mathfrak{h}'$ ist toral, und wäre $\mathfrak{h}'$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die $\mathfrak{h}'$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ ist
$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'.$$
Deshalb wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die $\mathfrak{h}$ echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Denn wäre $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ wäre dann
$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$
und somit $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von $\mathfrak{h}'$. □

Damit können wir viele Aussagen, die für CSA in halbeinfachen Lie-Algebren gelten, auf reduktive verallgemeinern. Wir beginnen mit Lemma 1.31.

Korollar 1.52. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine torale Unteralgebra. Dann ist* $\mathfrak{h}$ *genau dann eine CSA, wenn* $\mathfrak{h}$ *selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ so gibt es nach Lemma 1.51 eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.31 ist $Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit
$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gibt es eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht selbstzentralisierend. □

Hieraus ergibt sich die Verträglichkeit von CSA mit passenden Unteralgebren.

Korollar 1.53. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}'$.*

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, besteht $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X$ aus $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfachen Elementen. Für jedes $X \in \mathfrak{h}'$ ist deshalb auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ ist.

Es ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist. Daher ist auch $Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, also $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.52 bereits eine CSA von $\mathfrak{g}'$. □

Bemerkung 1.54. Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ zwar eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$, aber nicht notwendigerweise eine CSA. So ist etwa $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_2(k)$ eine CSA von $\mathfrak{gl}_2(k)$, und

$$\mathfrak{g}' := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$

eine abelsche, und damit reduktive, Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Die einzige CSA von $\mathfrak{g}'$ ist $\mathfrak{g}'$ selbst, weshalb $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = kI$ keine CSA von $\mathfrak{g}'$ ist.

1.6 Innere Automorphismen

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Konjugationsbeziehung von CSA in halbeinfache Lie-Algebren ein und verallgemeinern diese auf reduktive Lie-Algebren. Eine besondere Rolle spielen hierbei die inneren Automorphismen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die eine Untergruppe $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ von $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ bilden. Diese können wir besser kontrollieren und verstehen als die gesamte Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Alle Konjugationsaussagen, die wir im Folgenden treffen werden, beziehen sich auf $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$. Dabei orientieren wir uns in unserer anfänglicher Behandlung innerer Automorphismen an [**?**, §2.3].

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Ist $b\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \operatorname{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von $\mathfrak{g}$, also

$$a([X,Y]) = [a(X),Y] + [X,a(Y)] \quad \text{für alle } X,Y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([X,Y]) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [a^\ell(X), a^{n-\ell}(Y)] \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g},\ n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ sogar ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist. Insbesondere ist damit $\exp(\operatorname{ad} X) \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $X \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.55. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\operatorname{Int} \mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von den Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} X)$, mit ad-nilpotenten $X \in \mathfrak{g}$, erzeugt wird. Die Elemente von $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen*.

Beispiel 1.56. In der Standardbasis (e, h, f) von $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist e nilpotent und damit auch ad-nilpotent. Bezüglich der Standardbasis ist

$$\operatorname{ad} e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{ad} -e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\exp(\operatorname{ad} e) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(\operatorname{ad} -e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt außerdem, dass

$$\exp(e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \exp(e)^{-1} = \exp(-e) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix},$$

und die Konjugation

$$\phi \colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{sl}_2(k), \quad x \mapsto \exp(e) x \exp(e)^{-1}$$

wird bezüglich der Standardbasis durch

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Also ist $\phi = \exp(\operatorname{ad} e)$.

Diese Beobachtung ist kein Zufall.

Lemma 1.57. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ konkret nilpotent. Dann ist X auch* ad*-nilpotent und*

$$\exp(\operatorname{ad} X)(Y) = \exp(X)\, Y \exp(X)^{-1} \quad \text{für alle } Y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\operatorname{ad} X = \lambda_X + \rho_{-X}$, wobei λ_X die Linksmultiplikation mit X und ρ_{-X} die Rechtsmultiplikation mit $-X$ bezeichnet. Da X nilpotent ist, sind es auch λ_X und ρ_{-X}. Für alle $Y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_X)(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_X)^n}{n!}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n Y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}\right) Y = \lambda_{\exp(X)}(Y),$$

sowie analog auch

$$\exp(\rho_{-X}) = \rho_{\exp(-X)} = \rho_{\exp(X)^{-1}}.$$

Da λ_X und ρ_{-X} kommutieren ist daher für alle $Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\exp(\operatorname{ad} X)(Y) &= \exp(\lambda_X + \rho_{-X})(Y) = \exp(\lambda_X)\exp(\rho_{-X})(Y) \\ &= \lambda_{\exp(X)}\rho_{\exp(X)^{-1}}(Y) = \exp(X) Y \exp(X)^{-1},\end{aligned}$$

was genau die zu zeigende Aussage ist. □

Korollar 1.58. *Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine lineare reduktive Lie-Algebra und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ eine Untergruppe mit $\exp(X) \in G$ für jedes konkret nilpotente $X \in \mathfrak{g}$. Dann ist jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus G gegeben.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es genügt die Aussage für ad-nilpotentes $X \in \mathfrak{g}$ zu zeigen. Ist $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$, so ist X_2 nach Lemma 1.42 konkret nilpotent. Deshalb ist für jedes $Y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\operatorname{ad} X)(y) = \exp(\operatorname{ad} X_2)(Y) = \exp(X_2) Y \exp(X_2)^{-1},$$

wobei nach Annahme $\exp(X_2) \in G$. □

Beispiel 1.59.
1. Jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist durch Konjugation mit einem Element $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.
2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{o}(B)$ reduktiv ist. Ist $X \in \mathfrak{o}(B)$ konkret nilpotent, so ist $\exp(X) \in \mathrm{O}(B)$. Deshalb ist dann ist bereits jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{O}(B)$ gegeben.

Die Lie-Klammer einer reduktiven Lie-Algebra hängt nur von der Lie-Klammer der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra ab. Dementsprechend lassen sich auch die inneren Automorphismen einer reduktiven Lie-Algebra durch die inneren Automorphismen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra verstehen.

Lemma 1.60. *Es sei $\mathfrak{g}$ reduktiv und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann ist $\mathfrak{s}$ invariant unter* $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$ *und*

$$\begin{aligned}\operatorname{Int} \mathfrak{g} = \operatorname{Int}(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}) &\cong \operatorname{Int} \mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\mapsfrom \tau.\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $X \in \mathfrak{g}$ mit $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X)|_{\mathfrak{s}},$$

und X ist genau dann ad-nilpotent in $\mathfrak{g}$, wenn X_2 ad-nilpotent in $\mathfrak{s}$ ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X) = \exp(0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2) = \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2).$$

Damit ist

$$\operatorname{Int} \mathfrak{s} = \langle \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X) \mid X \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle$$

und

$$\operatorname{Int} \mathfrak{g} = \left\langle \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X) \mid X \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \right\rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Wir kommen nun zu der grundlegenden Konjugationsaussage dieses Abschnittes. Wie wir bereits in Beispiel 1.33 gesehen haben, sind je zwei CSA von $\mathfrak{sl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zueinander . Dies verallgemeinert sich auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren unter der Wirkung von $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$. Ein Beweis findet sich in [**?**, §16.4].

Lemma 1.61. *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$, d.h. für je zwei CSA $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.*

Wie wir bereits in Beispiel 1.50 gesehen haben, sind auch in der reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$ alle CSA unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zueinander. Für eine beliebige reduktive Lie-Algebra ergibt sich dies als Verallgemeinerung von Lemma 1.61.

Korollar 1.62. *Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.51 gibt es zwei CSA $\mathfrak{h}'_1, \mathfrak{h}'_2 \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_1$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_2$. Nach Lemma 1.61 gibt es $\tau \in \operatorname{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{h}'_2$. Nach Lemma 1.60 ist $\sigma := \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_1) = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'_2 = \mathfrak{h}_2. \qquad \square$$

Ist $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine reduktive Unteralgebra, so wird $\operatorname{Int} \mathfrak{g}$ durch die Konjugationen mit $\exp(X)$ für konkret nilpotente $X \in \mathfrak{g}$ erzeugt. Für diese X ist die Konjugation mit $\exp(X)$ auch ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$. Daher lässt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}$ zu einem inneren Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ fortsetzen. Diese Beobachtung können wir auf beliebige reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

Lemma 1.63. *Es sei $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ ein reduktive Unteralgebra mit $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Dann lässt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}'$ zu einem inneren Automorphismus von $\mathfrak{g}$ fortsetzen.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X)$ für $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'}$-nilpotentes $X \in \mathfrak{g}'$ zu zeigen. Hierfür sei $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$.

Nach Lemma 1.42 ist X_2 ein nilpotentes Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}'$. Mit der Inklusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ folgt aus Lemma 1.39, dass $X_2 \in \mathfrak{s}$. Aus der Funktorialität der Jordanzerlegung (Lemma 1.19) ergibt sich außerdem, dass X_2 bereits ein nilpotentes Element von $\mathfrak{s}$ ist.

Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2$ nilpotent und damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2 = 0 \oplus (\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} X_2)$ nilpotent. Damit ist $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2) \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$, und es gilt

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

ist

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} X) = \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2)|_{\mathfrak{g}'}.$$

Also ist $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X_2)$ eine Fortsetzung von $\exp(\operatorname{ad}_{g'} X)$ auf $\mathfrak{g}$. $\square$

2 Klassifikation halbeinfacher Orbiten

Ein klassisches Problem der linearen Algebra besteht darin, die halbeinfachen Elemente in $\mathfrak{gl}_n(k)$ zu verstehen, und der klassische Ansatz hierfür betrachtet nicht die halbeinfachen Elemente selbst, sondern ihre Konjugationsklassen unter $\mathrm{GL}_n(k)$.

Konkret ergibt sich, dass jede halbeinfache Matrix konjugiert zu einer Diagonalmatrix ist, und je zwei Diagonalmatrizen genau dann konjugiert zueinander sind, wenn sie bis auf Reihenfolge die gleichen Diagonaleinträge mit gleicher Vielfachheit haben. Die Orbiten halbeinfacher Matrizen unter $\mathrm{GL}_n(k)$ werden deshalb durch die Orbiten k^n/S_n parametrisiert, wobei S_n durch Permutation der Einträge auf k^n wirkt.

In diesem Kapitel verallgemeinern wir dieses Vorgehen auf reduktive Lie-Algebren, um die halbeinfachen Elemente in diesen besser zu verstehen. Hierfür kehren wir zunächst zu $\mathfrak{gl}_n(k)$ zurück und leiten die obige Klassifikation in Form von Theorem 2.7 erneut her. Anschließend betrachten wir eine beliebige reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ unter der Wirkung einer passenden Gruppe G, und verallgemeinern das Vorgehen von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{g}$ und G. So erhalten wir durch Theorem 2.18 eine Klassifikation der Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{g}$ unter G. Als Anwendung der allgemeinen Theorie klassifizieren wir anschließend die Orbiten halbeinfacher Element in $\mathfrak{so}_n(k)$ unter den Konjugationswirkungen von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$, sowie die Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$.

In unserem Vorgehen orientieren wir uns an [**?**, §2].

2.1 $\mathfrak{gl}_n(k)$

Als Motivation und zur Entwicklung der allgemeinen Theorie betrachten wir zunächst $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung der Gruppe $\mathrm{GL}_n(k)$.

Definition 2.1. Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei

$$\mathcal{O}_X := \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$

der *Orbit* von X unter der Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Die Menge der halbeinfachen Orbiten wird mit

$$\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)) := \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}$$

bezeichnet.

Da ein Element $X \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach ist, wenn SXS^{-1} für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ halbeinfach ist, ist der Orbit $\mathcal{O}_X$ genau dann halbeinfach, wenn X halbeinfach ist.

Unser erster Schritt zur Bestimmung von $\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k))$ besteht darin, den Zentralisator eines halbeinfachen Elementes zu verstehen.

Lemma 2.2. *Ist* $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ *und* $X \in \mathfrak{g}$ *halbeinfach, so ist* $\mathfrak{g}^X$ *reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach (also diagonalisierbar) ist, gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit

$$SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r), \tag{1}$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und λ_i mit einer Vielfachheit $n_i \in \mathbb{Z}_{>1}$ vorkommt. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ der X auf SXS^{-1} abbildet und damit auch $\mathfrak{g}^X$ auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt daher die Aussage unter der Annahme zu zeigen, dass X bereits eine Diagonalmatrix der Form (1) ist. Also sei

$$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r) = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \tag{2}$$

und $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i,j)-te Eintrag von AX ist dann $\mu_j a_{ij}$ und der (i,j)-te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Deshalb ist genau dann $A \in \mathfrak{g}^X$, wenn

$$\mu_i = \mu_j \quad \text{oder} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Aus (2) ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \,\middle|\, A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \dots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k)$$

damit reduktiv. □

Aus dem Beweis von Lemma 2.2 ergibt sich als Spezialfall die folgende Beobachtung, die sich im weiteren Verlauf als überaus nützlich erweisen wird:

Korollar 2.3. *Ist* $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ *und* $X \in \mathfrak{g}$ *eine reguläre Diagonalmatrix, so ist* $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{d}_n(k)$.

Hieraus folgt wiederum ein nützlichen Kriterium zur Konstruktion von CSA in linearen reduktiven Lie-Algebren.

Korollar 2.4. *Es sei* $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ *eine reduktive Unteralgebra, die eine reguläre Diagonalmatrix* X *enthält. Dann ist* $\mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{g}$ *eine CSA von* $\mathfrak{g}$.

Beweis. Wie bereits in Beispiel 1.50 bemerkt, ist $\mathfrak{d}_n(k)$ ist eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$. Deshalb ist $Z_{\mathfrak{gl}_n(k)}(\mathfrak{d}_n(k)) = \mathfrak{d}_n(k)$, sowie $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, und damit auch von $\mathfrak{g}$. Nach Annahme hat $X \in \mathfrak{h}$ paarweise verschiedene Diagonaleinträge, weshalb nach Korollar 2.3 $Z_{\mathfrak{gl}_n(k)}(X) = \mathfrak{d}_n(k)$. Damit ist

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{\mathfrak{gl}_n(k)}(X) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h},$$

und $\mathfrak{h}$ somit selbstzentralisierend. Nach Korollar 1.52 ist $\mathfrak{h}$ bereits eine CSA von $\mathfrak{g}$. □

Als Nächstes bemerken wir, dass es zur Klassifikation der halbeinfachen Orbiten genügt, eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$ zu betrachten.

Lemma 2.5. *Es sei* $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$*,* $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ *ein halbeinfacher Orbit und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine CSA. Dann gibt es* $X \in \mathfrak{h}$ *mit* $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$*.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$, also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'}$. Dann ist X' halbeinfach, da $\mathcal{O}$ ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Wie bereits in Beispiel gesehe sind alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\mathrm{GL}_n(k)$. Also gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesondere ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}. \qquad \square$$

Definition 2.6. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA, so sei

$$W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k)) \coloneqq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}).$$

Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ eine CSA, so induziert die Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{g}$ eine Wirkung der Gruppe $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ auf $\mathfrak{h}$. Über diese können wir $\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k))$ nun berechnen.

Theorem 2.7 (Klassifikationssatz für $\mathfrak{gl}_n(k)$)**.** *Es sei* $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$ *und* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine CSA. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{h}/W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k)) \to \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. Es genügt die Aussage für $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ statt für $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ zu zeigen, da $\mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}/W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$.

Da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist besteht $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.45 aus halbeinfachen Elementen. Deshalb ist $\mathcal{O}_X$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{h} \to \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.5 ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SXS^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_n(k), \mathrm{GL}_n(k)), [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Da $\tilde{\varphi}$ über φ faktorisiert ist auch φ surjektiv.

Für die Injektivität von φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $SX_2S^{-1} = X_1$. Also sind $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$ die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.2 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv, und nach Korollar 1.53 sind $\mathfrak{h}$ und $S\mathfrak{h}S^{-1}$ daher zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Korollar 1.62 gibt es somit $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\tau(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ nilpotent, so ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}\, y)(X_1) = 0$, also

$$\exp(Y) X_1 \exp(Y)^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}\, Y)(X_1) = X_1.$$

und somit $\exp(Y) \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X_1)$. Nach Korollar 1.58 ist daher τ durch Konjugation mit einem Element $T \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(TS)X_2(TS)^{-1} = TSX_2S^{-1}T^{-1} = TX_1T^{-1} = X_1,$$

und da

$$(TS)\mathfrak{h}(TS)^{-1} = TS\mathfrak{h}S^{-1}T^{-1} = \tau(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h},$$

ist auch $TS \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert zueinander. □

Wir wollen nun Theorem 2.7 für eine konkrete Berechnung der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ nutzen.

Um Theorem 2.7 anzuwenden, wählen wir zunächst eine CSA $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$; wir entscheiden uns für die Diagonalmatrizen $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k)$. Um die Orbiten $\mathfrak{h}/W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ und $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ und anschließend $W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k))$. Entscheidend hierfür ist, dass $\mathfrak{h}$ eine reguläre Diagonalmatrix enthält.

Aus Korollar 2.3 folgt damit bereits, dass $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ aus Diagonalmatrizen besteht, also $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{D}_n(k)$. Da $\mathfrak{d}_n(k)$ abelsch ist folgt außerdem, dass $\mathrm{D}_n(k) \subseteq Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Somit ist $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_n(k)$.

Zur Berechnung von $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ wollen wir die folgende Aussage festhalten, die sich im weiteren Verlauf als ebenso nützlich erweisen wie Korollar 2.3.

Lemma 2.8. *Es sei $T \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$ und es gebe reguläres $X \in T$. Unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid STS^{-1} = T\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es sei $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$. Außerdem sei $S = (s_{ij}) \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$. Dann ist $SXS^{-1} \in T$, also $SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ und somit

$$SX = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)S.$$

Der (i,j)-te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i,j)-te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \ldots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij}(\mu_i s_{ij'}) = s_{ij}(\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij}s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag der nicht 0 ist. Da S invertierbar ist, findet sich in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag, der verschieden von 0 ist. Also ist in jeder Zeile von S genau ein Eintrag verschieden von 0.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ gibt es auch $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in T$ mit

$$XS = S\,\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. □

Da $\mathfrak{h}$ eine reguläre Diagonalmatrix enthält, ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$ nach Lemma 2.8. Andererseits wird $\mathfrak{h}$ von $\mathrm{Mon}_n(k)$ normalisiert. Also ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)} = \mathrm{Mon}_n(k)$. Somit ist

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{h}, \mathrm{GL}_n(k)) &\coloneqq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)} = \mathrm{Mon}_n(k)/\,\mathrm{D}_n(k) \\ &= (\mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k))/\,\mathrm{D}_n(k) \cong \mathrm{P}_n(k) \cong S_n, \end{aligned}$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht der Permutation der Diagonaleinträge durch S_n. Zusammen mit der zusätzliche Identifikation

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ergibt sich damit die Klassifikation der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$:

Korollar 2.9. *Es gibt eine wohldefinierte Bijektion*

$$\begin{aligned} k^n/S_n &\xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k) \mid \mathcal{O} \textit{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, \\ [(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}. \end{aligned}$$

2.2 Reduktive Lie-Algebren

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das für $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathrm{GL}_n(k)$ beschriebene Vorgehen auf beliebige reduktive Lie-Algebren unter passenden Gruppenwirkungen. Entscheidend ist hierbei, dass wir, wie bereits für $\mathfrak{gl}_n(k)$, Cartan-Unteralgebren und ihr Konjugationsverhalten ausnutzen wollen. Entscheidend wird hierbei sein, dass sich die innerene Automorphismen durch die Gruppenwirkung darstellen lassen.

Sofern nicht anders angegeben, bezeichnet $\mathfrak{g}$ in diesem Abschnitt eine reduktive Lie-Algebra, und G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Homomorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt, so dass es für jeden $\sigma \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, dass durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt.

Definition 2.10. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G ein Gruppe, die per Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

der *Orbit* von X unter G. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathcal{O}$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Die Menge der halbeinfachen Orbiten wird mit

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}, G) \coloneqq \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher } G\text{-Orbit}\}.$$

bezeichnet.

Für $X \in \mathfrak{g}$ ist
$$\operatorname{ad}\phi(X) = \phi(\operatorname{ad} X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } \phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}.$$

Ist G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt, so ist deshalb X genau dann halbeinfach, wenn der Orbit $\mathcal{O}_X$ halbeinfach ist. Für das weitere Vorgehen beschränken wir uns auf solche Gruppen und Gruppenwirkungen, so dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, das durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt.

Beispiel 2.11. 1. $\mathrm{GL}_n(k)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und nach Korollar 1.58 ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

Analog ergibt sich auch die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{sl}_n(k)$.

2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass
$$\mathfrak{o}(B) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \operatorname{id} A^T B + BA = 0\}$$
reduktiv ist. Dann wirkt die Gruppe
$$\mathrm{O}(B) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T B S = B\}$$
durch Konjugation auf $\mathfrak{o}(B)$, und für nilpotentes $X \in \mathfrak{o}(B)$ ist $\exp(X) \in \mathrm{O}(B)$. Also ist nach Korollar 1.58 jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{o}(B)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{O}(B)$ gegeben. Hieraus ergeben sich die folgenden konkrete Beispiele.

   a) Für $B = 0$ ergibt sich erneut die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$

   b) Für die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{M}_n(k)$ ergibt sich die Konjugationswirkung der orthogonalen Gruppe
   $$\mathrm{O}_n(k) \coloneqq \mathrm{O}(I) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^\top = S^{-1}\}$$
   auf $\mathfrak{so}_n(k) = \mathfrak{o}(I)$.

   c) Für
   $$\Omega = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$
   ergibt sich die Konjugationswirkung der symplektischen Gruppe
   $$\mathrm{Sp}_{2n}(k) \coloneqq \mathrm{O}(\Omega) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^\top \Omega S = \Omega\}$$
   auf $\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \mathfrak{o}(\Omega)$.

3. Ist $G \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, so wirkt G auf natürliche Weise auf $\mathfrak{g}$, und G erfüllt die gewünschte Bedingung genau dann, wenn $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq G$. Spezialfälle hiervon sind $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ selbst sowie $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

Ist $X \in \mathrm{M}_n(k)$ konkret nilpotent, so ist $\det \exp(X) = 1$. Denn da X nilpotent ist, gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, so dass SXS^{-1} eine echte obere Dreiecksmatrix ist. Deshalb ist $\sum_{m=1}^{\infty}(SXS^{-1})^m/m!$ eine echte obere Dreiecksmatrix und somit $\exp(SXS^{-1})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Daraus folgt, dass

$$1 = \det(\exp(SXS^{-1})) = \det(S\exp(X)S^{-1}) = \det(\exp(X)).$$

Wir erhalten können daher aus den Beispielen 2.11 noch weitere Beispiele:

Beispiel 2.12. 1. Statt der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{sl}_n(k)$ lässt sich auch die Konjugationswirkung von $\mathrm{SL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{sl}_n(k)$ betrachten.

2. Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{o}(B)$ reduktiv ist, so ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{o}(B)$ bereits durch Konjugation mit einem Element aus

$$\mathrm{SO}(B) = \{S \in \mathrm{O}(B) \mid \det(S) = 1\}$$

gegeben. Insbesondere ergibt sich für $B = I$ die Konjugationswirkung von

$$\mathrm{SO}_n(k) \coloneqq \{S \in \mathrm{O}_n(k) \mid \det S = 1\}$$

auf $\mathfrak{so}_n(k)$.

3. Ist $\mathfrak{g}$ reduktiv, so ist für ad-nilpotente $X \in \mathfrak{g}$ bereits $\exp(\operatorname{ad} X) \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ und somit

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \{\phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \mid \det\phi = 1\}.$$

Wir wollen uns nun der Klassifikation der halbeinfachen Orbiten zuwenden. Motiviert von Lemma 2.2 besteht unser erster Schritt darin, die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zu verstehen.

Proposition 2.13. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ ein halbeinfaches Element und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, die X enthält. Es seien $\Phi \coloneqq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*

$$\Phi_X \coloneqq \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}. \tag{3}$$

Dann ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha \tag{4}$$

und der Zentralisator $\mathfrak{g}^X$ ist reduktiv.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{5}$$

die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Hat $Y \in \mathfrak{g}$ bezüglich (5) die Zerlegung $Y = Y_0 + \sum_{\alpha\in\Phi} Y_\alpha$, so ist

$$[X, Y] = \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha(X) Y_\alpha.$$

Daraus folgt mit der Direktheit der Zerlegung (5), dass

$$Y \in \mathfrak{g}^X \Leftrightarrow \alpha(X)Y_\alpha = 0 \text{ für alle } \alpha \in \Phi.$$

Hieraus ergibt sich (5).

Das Zentrum von $\mathfrak{g}^X$ ergibt sich als

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha \in \Phi_X} \ker \alpha. \tag{6}$$

Es ist nämlich $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist $[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \alpha(Y)\mathfrak{g}_\alpha$, also genau dann $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$, wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von $\mathfrak{g}^X$ gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da bereits $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist dann auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $kH_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [H_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Es ist also

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus kH_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ nicht auflösbar ist (hier nutzen wir, dass $\operatorname{char} k \neq 0$). ☐

Als technische Hilfsaussage nutzen wir zudem Folgendes:

Behauptung 2. Es gibt $H \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(H) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(H) \neq \beta(H)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des Isomorphismus $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^{**}, H \mapsto (\phi \mapsto \phi(H))$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}_k \Phi$ gibt es eine k-Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ von $\mathfrak{h}^*$. Der Körper k ist algebraisch abgeschlossen mit $\operatorname{char} k = 0$, also unendlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Also gibt es $z_1, \ldots, z_n \in k$, die linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Es sei $\varphi\colon \mathfrak{h}^* \to k$ die k-lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. ☐

Um zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$, zeigen wir zunächst, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$: Andernfalls gebe es $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und

$$\Psi := \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Für alle $H \in \mathfrak{h}$ und $p \geq 1$ ist dann auch

$$(\operatorname{ad} H)^p(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(H)^p Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal in $\mathfrak{g}^X$ ist. Es sei $H \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2 und $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Für $p = 1, \dots, n$ sei

$$Z_p \coloneqq (\operatorname{ad} H)^p(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(H)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Da die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ eindimensional sind, ist $(Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_n})$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $(Z_1, \dots, Z_n)$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0. \end{aligned}$$

Da $Z_1, \dots, Z_n \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da $\Psi \neq \emptyset$ gibt deshalb $\alpha \in \Psi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Dies steht im Widerspruch zu Behauptung 1, und zeigt, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (6) ein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Dann ist

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Dies steht im Widerspruch zu Behauptung 1. Insgesamt zeigt dies, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. □

Korollar 2.14. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist auch der Zentralisator $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} \coloneqq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Lemma 1.42 ist X_2 ein halbeinfaches Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$. Damit ist $\mathfrak{s}^{X_2}$ nach Proposition 2.13 reduktiv und somit auch

$$\mathfrak{g}^X = Z(\mathfrak{g})^{X_1} \oplus \mathfrak{s}^{X_2} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}^{X_2},$$

da $Z(\mathfrak{g})$ abelsch ist. □

Wie bereits im Fall von $\mathfrak{gl}_n(k)$ wollen wir uns zur Klassifikation der halbeinfachen Orbiten auf eine CSA von $\mathfrak{g}$ einschränken können. Die Rechtfertigung hierfür liefern uns die folgenden Aussagen.

Lemma 2.15. *Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Dann gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Beweis. Nach Korollar 1.62 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ und nach Annahme gibt es $s \in G$, das durch σ wirkt, für das also $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. □

Korollar 2.16. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\mathcal{O} \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}, G)$ ein halbeinfacher Orbit. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. Dann ist X' halbeinfach und in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Nach Lemma 2.15 gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Damit ist $s \cdot X' \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{s \cdot X'}$. □

Die Klassifikation halbeinfacher Orbiten in $\mathfrak{g}$ ergibt sich nun als direkte Verallgemeinerung von Theorem 2.7.

Definition 2.17. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so sei

$$W(\mathfrak{h}, G) := N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}).$$

Theorem 2.18. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die per Lie-Algebra-Homomorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt, so dass es für jeden $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, dass durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathfrak{h}/W &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}, G) \\ [X] &\mapsto \mathcal{O}_X \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. Es genügt die Aussage für $N_G(\mathfrak{h})$ statt für W zu zeigen.

Da $\mathfrak{h}$ aus halbeinfachen Elementen besteht, und $\mathcal{O}_{s \cdot X} = \mathcal{O}_X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $s \in G$, ist Φ wohldefiniert. Nach Korollar 2.16 ist Φ surjektiv.

Es seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$. Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass X_1 und X_2 unter G konjugiert sind. Da $X_1 \in \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $s \in G$ mit $s \cdot X_2 = X_1$. Dann sind $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$, die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind ist bereits $\mathfrak{h}, s \cdot \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$, wobei $\mathfrak{g}^{X_1}$ nach Proposition 2.13 reduktiv ist. Nach Korollar 1.53 sind $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$.

Nach Korollar 1.62 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Für nilpotentes $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ ist $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = 0$ und somit

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)^n}{n!}(X_1) = X_1.$$

Da $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ von Elementen der Form $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)$ für nilpotente $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ erzeugt wird, wird X_1 von jedem inneren Automorphismus von $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ stabilisiert. Insbesondere ist $\sigma(X_1) = X_1$.

Nach Lemma 1.63 lässt sich σ zu einem inneren Automorphismus $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ fortsetzen. Nach Annahme gibt es $t \in G$, das durch τ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Zum einen ist dann

$$t \cdot s \cdot X_2 = t \cdot X_1 = \tau(X_1) = \sigma(X_1) = X_1,$$

und zum anderen ist

$$t \cdot s \cdot \mathfrak{h} = \tau(s \cdot \mathfrak{h}) = \sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},$$

also $t \cdot s \in N_G(\mathfrak{h})$. Somit sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_G(\mathfrak{h})$ konjugiert. $\square$

3 Halbeinfache Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$

Als eine direkte Anwendung der in Kapitel 2 entwickelten Theorie bestimmen wir in diesem Kapitel die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$, sowie die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$

Dabei meinen wir im Folgenden mit der Wirkung von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$ auf $\mathfrak{so}_n(k)$, sowie der Wirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ stets die entsprechende Konjugationswirkung. Wir nutzen im Folgenden die Definitionen und Notationen aus Abschnitt 1.1.2, und raten dem Leser, sich mit diesen gegebenenfalls noch einmal vertraut zu machen.

Wie wir bereits in Beispiel 1.6 gesehen haben, ist die Lie-Algebra $\mathfrak{so}_n$ für $n = 2$ eindimensional und abelsch, und für $n \neq 2$ halbeinfach, also stets reduktiv. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}$ ist für alle $n \geq 1$ halbeinfach und damit ebenfalls reduktiv. In den Beispielen 2.11 und 2.12 haben wir außerdem gesehen, dass jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{so}_n(k)$ nicht nur durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{O}_n(k)$ gegeben ist, sondern bereits mit einem Element aus $\mathrm{SO}_n(k)$. Außerdem ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ gegeben. Es sind daher alle Bedingungen erfüllt, um die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ unter den Wirkungen von $\mathrm{O}_n(k)$ und $\mathrm{SO}_n(k)$, sowie die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter der Wirkung von $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$, mithilfe der Klassifikation aus Theorem 2.18 zu bestimmen.

Um Theorem 2.18 auf $\mathfrak{so}_n(k)$ anwenden zu können, müssen wir zunächst eine CSA $\mathfrak{h}_n \subseteq \mathfrak{so}_n(k)$ finden, und anschließend die Gruppen $W(\mathfrak{h}_n, \mathrm{O}_n(k))$ und $W(\mathfrak{h}_n, \mathrm{SO}_n(k))$ ausrechnen. Hierfür ist es begehrenswert, dass $\mathfrak{h}_n$ eine Form hat, mit der sich möglichst leicht arbeiten lässt. Unser Ziel ist es, den Schnitt $\mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{so}_n(k)$ als CSA wählen zu können, da wir bereits verschiedene Aussagen über die daraus entstehenden Zentralisatoren und Normalisatoren kennen, etwa Korollar 2.3 und Lemma 2.8. Da aber $\mathfrak{so}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ genau die Unteralgebra der schiefsymmetrischen Matrizen ist, führt dies für kein $n \geq 2$ zum Erfolg.

Um dieses Dilemma zu umgehen, wollen wir im Folgenden statt mit $\mathfrak{so}_n(k)$ selbst mit einer isomorphen Lie-Algebra $\mathfrak{g}_n$ arbeiten, so dass $\mathfrak{g}_n$ nicht nur eine möglichst schöne Form hat, sondern auch $\mathfrak{d}_n \cap \mathfrak{g}_n$ eine CSA in $\mathfrak{g}_n$ ist. Um eine solche Lie-Algebra $\mathfrak{g}_n$ zu konstruieren, nutzen wir aus, dass $\mathfrak{so}_n(k) = \mathfrak{o}(I)$ über die darstellende Matrix I einer Bilinearform definiert ist. Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$ eine Matrix, die die gleiche Bilinearform bezüglich einer anderen Basis beschreibt, so sind dann $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{o}(B)$ isomorphie Lie-Algebren.

Dieses Vorgehen ist ein geläufiger Trick, um eine äquivalente Definition von $\mathfrak{so}_n(k)$ zu erhalten, die für die jeweiligen Zwecke besser geeignet ist. In [**?**, §1] etwa werden

$\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$ nicht über die Einheitsmatrizen I_{2n} und I_{2n+1} definiert, sondern über die Matrizen

$$\begin{pmatrix} & I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & I_n \\ & I_n & \end{pmatrix}.$$

Auch $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ durch eine isomorphe Lie-Algebra ersetzen, wenn auch aus anderen Gründen: Wie bereits gesehen ist

$$\mathfrak{sp}_{2n}(k) = \left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P^\top \end{pmatrix} \,\middle|\, P, Q, R \in \mathrm{M}_n(k), Q^\top = Q, R^\top = R \right\},$$

$\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ enthält also für alle $n \geq 1$ eine reguläre Diagonalmatrix. Nach Korollar 2.4 ist daher $\mathfrak{h}_{2n} := \mathfrak{d}_{2n}(k) \cap \mathfrak{sp}_{2n}(k)$ eine CSA in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$. Es ist daher naheliegend, mit $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ selbst und der CSA $\mathfrak{h}_{2n}$ zu arbeiten. Tatsächlich liefern uns die Rechnungen, die wir im Folgenden durchführen, durch das Vertauschen und Modifizieren einiger Indizes die entsprechenden Berechungen bezüglich $\mathfrak{h}_{2n}$. Gerade deshalb werden wir aber $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ durch eine leicht abgeänderte, isomorphe Lie-Algebra ersetzen, so dass wir alle essenziellen Rechnungen und Konstruktion nur einmal durchführen müssen, und und uns für die konkreten Orbiten auf die jeweils entscheidenden Details konstruieren können.

Um die entsprechenden isomorphen Lie-Algebren zu konstruieren nutzen wir jeweils, dass $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ über die darstellenden Matrizen von Bilinearformen definiert sind. Hierfür betrachten wir zunächst, wie sich die halbeinfachen Orbiten unter den entsprechenden Isomorphismen verhalten, und geben diese dann für $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ explizit an. Im mittleren Teil des Kapitels untersuchen wir die Struktur der isomorphen Lie-Algebren, um am Ende schließlch die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_n(k)$ und $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ selbst zu erhalten.

3.1 Gemeinsames Vorgehen

In diesem Abschnitt konstruieren wir die versprochenen isomorphen Lie-Algebren und gebe an, wie sich die halbeinfachen Orbiten unter den jeweiligen Isomorphismen verhalten.

3.1.1 Halbeinfache Orbiten unter verträglichen Isomorphismen

Definition 3.1. Es seien G_1 und G_2 Gruppen, X_1 eine G_1-Menge und X_2 eine G_2-Menge. Eine Abbildung $F\colon X_1 \to X_2$ und ein Gruppenhomomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ heißen *verträglich*, falls

$$f(g) \cdot F(x) = F(g \cdot x) \quad \text{für alle } g \in G_1 \text{ und } x \in X_1.$$

Lemma 3.2. *Für $i = 1, 2$ sei G_i eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}_i$ wirkt. Es sei $\Phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Isomorphismus von*