Halbeinfache und Nilpotente Orbiten

Jendrik Stelzner

24. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbereitung

Im Folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} k = 0$. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren und Vektorräume über dem Grundkörper k. Sofern nicht anders angegeben sind alle Lie-Algebren endlichdimensional.

1.1 Notationen, Konventionen und Grundlagen

$\mathrm{M}_n(k)$ ist der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über k. Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ ist

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k)$$

sowie

$$\operatorname{adiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \coloneqq \begin{pmatrix} & & \lambda_n \\ & \iddots & \\ \lambda_1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

$\mathrm{D}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ bezeichnet die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen und $\mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ die Untergruppe der Permutationsmatrizen. Eine *Monomialmatrix*, bzw. *verallgemeinerte Permutationsmatrix* ist eine Matrix $S \in \mathrm{M}_n(k)$, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. Monomialmatrizen sind invertierbar und bilden eine Untergruppe $\mathrm{Mon}_n(k) \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$. Es sind $\mathrm{D}_n(k), \mathrm{P}_n(k) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$ mit $\mathrm{Mon}_n(k) = \mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k)$, wobei $\rtimes$ das innere semidirekte Produkt mit Normalteiler auf der linken Seite bezeichnet.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet die allgemeine lineare Lie-Algebra von Dimension n^2 und $\mathfrak{sl}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die spezielle lineare Lie-Algebra. Es bezeichnet $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen, $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der oberen Dreiecksmatrizen und $\mathfrak{u}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ die Unteralgebra der echten oberen Dreiecksmatrizen.

Für einen Vektorraum V sei $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der k-linearen Automorphismen von V und $\mathrm{SL}(V) = \{\phi \in \mathrm{GL}(V) \mid \det \phi = 1\}$. Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ die Gruppe der Lie-Algebra-Automorphismen von $\mathfrak{g}$. Das *Zentrum* von $\mathfrak{g}$

ist

$$Z(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

und für zwei Teilmengen $I, J \subseteq \mathfrak{g}$ ist

$$[I, J] := \operatorname{span}_k\{[X, Y] \mid X \in I, Y \in J\}.$$

Ist $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $X \subseteq \mathfrak{g}$, so ist

$$Z_{\mathfrak{g}}(X) := \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \text{ für alle } x \in X\}$$

der *Zentralisator* von X in $\mathfrak{g}$, und für ein Element $x \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathfrak{g}^X := Z_{\mathfrak{g}}(X) := Z_{\mathfrak{g}}(\{X\}) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}.$$

der *Zentralisator* von X in $\mathfrak{g}$.

$\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ bezeichnet das *Radikal von* $\mathfrak{g}$, d.i. das eindeutige maximale auflösbare Ideal von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = 0$. $\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn $\mathfrak{g} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ für einfache Ideale $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Für $B \in \mathrm{M}_n(k)$ ist

$$G_B := \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T B S = B\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$,

$$\mathfrak{g}_B := \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T B + BA = 0\}$$

eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und G_B wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_B$.

Ist V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$, so beschreibt B bezüglich $\mathcal{B}$ eine Bilinearform β auf V. Unter dem durch $\mathcal{B}$ induzierten Isomorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{gl}(V)$ entspricht $\mathfrak{g}_B$ entspricht der Lie-Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_\beta := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \beta(f(v), w) + \beta(v, f(w)) = 0 \text{ für alle } v, w \in V\}$$

und unter dem induzierten Isomorphismus von $\mathrm{GL}_n(k)$ und $\mathrm{GL}(V)$ entspricht G_B der Isometriegruppe

$$G_\beta := \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \beta(f(v), f(w)) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Ist $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V, so wird β bezüglich $\mathcal{C}$ durch eine Matrix $C \in \mathrm{M}_n(k)$ beschrieben. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ induziert einen Isomorphismus von Lie-Algebren $\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C$ und einen Isomorphismus von Gruppen $G_B \cong G_C$: Ist $\Omega \in \mathrm{M}_n(k)$ die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ (d.h. die i-te Spalte von Ω sind die Koordinaten von v_i bezüglich $\mathcal{C}$), so ist $B = \Omega^T C \Omega$ und somit

$$\mathfrak{g}_B \cong \mathfrak{g}_C, A \mapsto \Omega A \Omega^{-1} \quad \text{und} \quad G_B \cong G_C, S \mapsto \Omega S \Omega^{-1}.$$

1.2 Jordanzerlegung

In diesem Abschnitt erinnern wir an die grundlegende Theorie der Jordanzerlegung von Endomorphismen und der Jordanzerlegung in halbeinfachen Lie-Algebren.

Definition 1.1. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $x \in \operatorname{End}_k(V)$ heißt *halbeinfach*, wenn er diagonalisierbar ist.

Bemerkung 1.2. $x \in \operatorname{End}_k(V)$ ist genau dann halbeinfach, wenn jeder x-invariante Untervektorraum ein x-invariantes direktes Komplement besitzt.

Die Jordanzerlegung eines Endomorphismus $x \in \operatorname{End}_k(V)$ schreibt diesen als Summe eines halbeinfachen Endomorphismus $x_s \in \operatorname{End}_k(V)$ und eines nilpotenten Endomorphismus $x_n \in \operatorname{End}_k(V)$.

Proposition 1.3 (Konkrete Jordanzerlegung)**.** *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $x \in \operatorname{End}_k(V)$.*

1. *Es gibt eindeutige $x_s, x_n \in \operatorname{End}_k(V)$, so dass*
   (a) *$x = x_s + x_n$,*
   (b) *x_s ist halbeinfach und x_n nilpotent,*
   (c) *x_s und x_n kommutieren.*
2. *Es gibt Polynome $P, Q \in k[T]$ mit $P(0) = Q(0) = 0$, so dass $x_s = P(x)$ und $x_n = Q(x)$. Insbesondere kommutiert ein Endomorphismus genau dann mit x wenn er mit x_s und x_n kommutiert.*
3. *Für Untervektorräume $U \subseteq W \subseteq V$ mit $x(W) \subseteq U$ ist auch $x_s(W) \subseteq U$ und $x_n(W) \subseteq U$.*

Definition 1.4. Ist $x \in \operatorname{End}_k(V)$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Proposition 1.3 die *konkrete Jordanzerlegung* von x. x_s ist der *halbeinfache Teil* von x und x_n der *nilpotente Teil* von x.

Wir wollen das Konzept eines halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementes auf Lie-Algebren verallgemeinern, wobei wir uns zunächst auf halbeinfache Lie-Algebren beschränken. Entscheidend hierfür ist der Begriff eines ad-halbeinfachen, bzw. ad-nilpotenten Elementes.

Definition 1.5. Ein Element x einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ad-*halbeinfach*, bzw. ad-*nilpotent*, falls $\operatorname{ad} x$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist.

Beispiel 1.6. Es sei $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie-Algebra.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist x auch ad-halbeinfach: Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x, wobei v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist. Dann ist $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

eine Basis von $\mathfrak{gl}(V)$. Für alle $i, j, k = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned}
[x, E_{ij}](v_k) &= x E_{ij}(v_k) - E_{ij} x(v_k) = \delta_{jk} x(v_i) - \lambda_k E_{ij}(v_k) \\
&= \lambda_i \delta_{jk} v_i - \lambda_k \delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_k)\delta_{jk} v_i \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{jk} v_i = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}(v_k),
\end{aligned}$$

und somit

$$[x, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Es ist also $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x \in \operatorname{End}_k(\mathfrak{gl}(V))$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$ ist, ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x)|_{\mathfrak{g}}$ halbeinfach.

Ist $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, so ist x auch ad-nilpotent: Es ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x = \lambda_x - \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$ bezeichnet. Da x nilpotent ist, sind es auch λ_x und ρ_{-x}. Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$ nilpotent. Da $\mathfrak{g}$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$ ist, ist somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x)|_{\mathfrak{g}}$ nilpotent.

Das nächste Lemma erlaubt es uns, die konkrete Jordanzerlegung auf Lie-Unteralgebren einzuschränken, sofern diese halbeinfach sind.

Lemma 1.7. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache Lie-Unteralgebra, so enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller ihrer Elemente.*

Ist $\mathfrak{g}$ eine beliebige halbeinfache Lie-Algebra, so ist $\ker \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g}) = 0$ und deshalb $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren. Dies erlaubt zusammen mit dem vorherigen Lemma die Verallgemeinerung der Jordanzerlegung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

Proposition 1.8 (Abstrakte Jordanzerlegung)**.** *Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, so gibt es für jedes Element $x \in \mathfrak{g}$ eindeutige $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$, so dass*

1. $x = x_s + x_n$,
2. x_s *ist* ad-*halbeinfach und* x_n *ist* ad-*nilpotent,*
3. x_s *und* x_n *kommutieren.*

x_s und x_n sind eindeutig dadurch bestimmt, dass

$$\operatorname{ad}(x_s) = (\operatorname{ad} x)_s \quad \textit{und} \quad \operatorname{ad}(x_n) = (\operatorname{ad} x)_n$$

Ein Element aus $\mathfrak{g}$ kommutiert genau dann mit x, wenn es mit x_s und x_n kommutiert.

Definition 1.9. Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$, so heißt die Zerlegung $x = x_s + x_n$ aus Proposition 1.8 die *(abstrakte) Jordanzerlegung* von x. x_s ist der *halbeinfache Teil* von x und x_n der *nilpotente Teil* von x. x heißt *halbeinfach*, falls $x = x_s$, und *nilpotent* falls $x = x_n$.

Bemerkung 1.10. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra.

1. $x \in \mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn x ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist.
2. Ist $\mathfrak{g}$ linear, so folgt aus der Eindeutigkeit der abstrakten Jordanzerlegung, dass die abstrakte und die konkrete Jordanzerlegung auf $\mathfrak{g}$ übereinstimmen. Dementsprechend werden wir in diesem Fall nicht zwischen konkreter und abstrakter Jordanzerlegung unterscheiden.

Lemma 1.11 (Funktorialität der Jordanzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei halbeinfache Lie-Algebren und $x \in \mathfrak{g}_1$ mit Jordanzerlegung $x = x_s + x_n$. Ist $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\phi(x_s) = \phi(x)_s$ und $\phi(x_n) = \phi(x)_n$.*

1.3 CSA und Wurzelraumzerlegung

In diesem Schnitt erinnern an das grundlegende Konzept einer Cartan-Unteralgebra einer halbeinfachen Lie-Algebra. Wir erläutern das Zustandekommen der resultierenden Wurzelraumzerlegung und halten einige ihrer elementaren Eigenschaften fest.

Definition 1.12. Eine Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *toral* falls $\mathfrak{h}$ aus ad-halbeinfaches Elementen besteht.

Beispiel 1.13. Die Unteralgebra der Diagonalmatrizen $\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ besteht aus halbeinfachen Elementen (in der Sinne der konkreten Jordanzerlegung) und damit aus ad-halbeinfachen Elementen.

Nach gleicher Argumentation ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{d}_n(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{t}_n(k)$.

Ist allgemeiner $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$: Für jedes $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ halbeinfach, und somit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{g}'}$.

In jedem der obigen Beispiele ist die torale Unteralgebra abelsch. Dies ist kein Zufall.

Lemma 1.14. *Torale Unteralgebren sind abelsch.*

Diese Kommutativität hat entscheidende Konsequenzen für die adjungierte Darstellung einer toralen Unteralgebra: Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so besteht $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} \subseteq \operatorname{End}_k(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen, paarweise kommutierenden Endomorphismen. Diese sind simultan diagonalisierbar, weshalb $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ mit

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Die Elemente $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ spielen eine bedeutend Rolle bei der Untersuchung von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{h}$.

Definition 1.15. Für eine torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sei

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

In der Theorie halbeinfachen Lie-Algebren, in denen (ad)-halbeinfache Elemente mithilfe der Jordanzerlegung verstanden werden können, spielen maximale torale Unteralgebren eine besondere Rolle.

Definition 1.16. Eine *Cartan-Unteralgebra* (CSA) einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. Die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ heißen *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Lemma 1.17. *Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, d.h. $\mathfrak{h}$ ist selbstzentralisierend.*

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ergibt sich mit den Wurzeln $\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ damit eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

da $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \notin \Phi \cup \{0\}$ und $\mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Definition 1.18. Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebrau und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Die Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

mit $\Phi \coloneqq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist die *Wurzelraumzerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Die Räume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind die entsprechenden *Wurzelräume*

Beispiel 1.19. Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(k)$ und $\mathfrak{h} \coloneqq \mathfrak{d}_n(k) \cap \mathfrak{sl}_n(k)$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen. $\mathfrak{h}$ ist eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{h}$ ist bereits eine CSA. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine beliebige CSA, so besteht $\mathfrak{h}'$ aufgrund der Übereinstimmung der konkreten und abstrakten Jordanzerlegung aus halbeinfachen Elementen. Da $\mathfrak{h}'$ abelsch ist, sind die Elemente aus $\mathfrak{h}'$ simultan diagonalisierbar. Es gibt also $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$. Die Konjugation mit S ist ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist unter dem $\mathfrak{g}$ invariant ist, der sich also zu einem Automorphismus von $\mathfrak{g}$ einschränken lässt. Daher ist $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} \subseteq \mathfrak{h}$, woraus wegen der Maximalität von $S\mathfrak{h}'S^{-1}$ folgt, dass $\mathfrak{h} = S\mathfrak{h}'S^{-1}$.

Für $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{h}$ ist

$$[X, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n,$$

wobei $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ die Standardbasis von $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezeichnet. Für $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}^*$ mit

$$\varepsilon_i(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_i \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

ist daher

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = kE_{ij} \quad \text{für alle } 1 \le i \ne j \le n.$$

Damit ergeben sich für $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ die Wurzeln

$$\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i \ne j \le n\}$$

und die Wurzelraumzerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \ne j} kE_{ij}.$$

In diesem Beispiel zeigen sich bereits einige elementare Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung, die wir hier noch festhalten wollen.

Proposition 1.20 (Eigenschaften der Wurzelraumzerlegung)**.** *Es seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\Phi \coloneqq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln.*

1. *Φ erzeugt $\mathfrak{h}^*$ als k-Vektorraum.*

2. *Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ eine k-Basis von $\mathfrak{h}^*$, so ist $\Phi \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*

3. *Für alle $\alpha \in \Phi$ ist $k\alpha \cap \Phi = \{-\alpha, \alpha\}$.*

4. *Die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ sind 1-dimensional.*

5. *Für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ ist*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = 0 & \text{falls } \alpha + \beta \notin \Phi, \\ = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \in \Phi, \\ \subseteq \mathfrak{h} & \text{falls } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

6. *Es sei $\alpha \in \Phi$. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ ist eindimensional und $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$.*

   Insbesondere gibt es ein eindeutiges $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(h_\alpha) = 2$ und $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Ferner ist

$$S_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$$

   eine Lie-Unteralgebra mit $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.

1.4 Reduktive Lie-Algebren

Reduktive Lie-Algebren enstehen durch das Hinzufügen eines Zentrums zu einer halbeinfachen Lie-Algebra, und sind eine Verallgemeinerung der solchen. Die Lie-Algebra-Struktur einer reduktiven Lie-Algebra ist durch die zugrundelegende halbeinfache Lie-Algebra bereits eindeutig bestimmt. Dies führt dazu, dass sich viele Konzepte und Aussagen aus der Theorie halbeinfacher Lie-Algebren direkt auf reduktive verallgemeinern lassen.

1.4.1 Definition

Lemma 1.21. *Für eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind äquivalent:*

1. $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *und* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach.*
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ *für ein abelsches Ideal* $\mathfrak{a}$ *und ein halbeinfaches Ideal* $\mathfrak{s}$.
3. *Die adjungierte Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *ist halbeinfach.*
4. $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g})$.

Ferner gilt für 2 bereits $\mathfrak{a} = Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Beweis. ($4 \Rightarrow 3$) $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ ist halbeinfach, da

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\operatorname{rad} \mathfrak{g}.$$

Nach dem Satz von Weyl ist deshalb $\mathfrak{g}$ halbeinfach als $(\operatorname{ad} \mathfrak{g})$-Modul
($3 \Rightarrow 2$) Es existiert eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$$

in irreduzible Ideale, wobei $\dim \mathfrak{a}_i = 1$ und $\dim \mathfrak{s}_j \geq 2$. Als Lie-Algebren sind die $\mathfrak{a}_i$ damit abelsch und die $\mathfrak{s}_j$ einfach. Also ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ abelsch und $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_m$ halbeinfach mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$.
($2 \Rightarrow 1$) Es ist $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{a}) \oplus Z(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$.
($1 \Rightarrow 4$) Es ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \operatorname{rad}(Z(\mathfrak{g})) \oplus \operatorname{rad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = Z(\mathfrak{g})$. □

Definition 1.22. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *reduktiv* falls sie eine (und damit alle) der Bedingungen in Lemma 1.21 erfüllt.

Beispiel 1.23. Abelsche und halbeinfache Lie-Algebren sind reduktiv. Endliche Produkte von reduktiven Lie-Algebren sind ebenfalls reduktiv.

$\mathfrak{gl}_n(k)$ ist reduktiv, da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ sowie $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] = \mathfrak{sl}_n(k)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k) = kI \oplus \mathfrak{sl}_n(k)$.

Die oberen Dreiecksmatrizen $\mathfrak{t}_n(k)$ sind für $n \geq 2$ nicht reduktiv. Zum einen ist $Z(\mathfrak{t}_n(k)) = kI$ und $[\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] = \mathfrak{u}_n(k)$, aber $\mathfrak{t}_n(k) \supsetneq kI \oplus \mathfrak{u}_n(k)$. Zum anderen ist auch $\operatorname{rad} \mathfrak{t}_n(k) = \mathfrak{t}_n(k) \neq \mathfrak{d}_n(k) = Z(\mathfrak{t}_n(k))$.

Das Beispiel $\mathfrak{t}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ zeigt auch, dass Lie-Unteralgebren reduktiver Lie-Algebren nicht notwendigerweise selber reduktiv sind.

Die Zerlegung einer reduktiven Lie-Algebra in ihr Zentrum und ihren halbeinfachen Teil ist in gewissem Rahmen mit Homomorphismen verträglich.

Lemma 1.24. *Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei reduktive Lie-Algebren mit $\mathfrak{s}_1 := [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ und $\mathfrak{s}_2 := [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. Ist $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, so ist $\phi(\mathfrak{s}_1) \subseteq \mathfrak{s}_2$.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{s}_1 = [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]$, da $\mathfrak{s}_1$ halbeinfach ist. Also ist

$$\phi(\mathfrak{s}_1) = \phi([\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_1]) = [\phi(\mathfrak{s}_1), \phi(\mathfrak{s}_1)] \subseteq [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{s}_2. \qquad \square$$

Bemerkung 1.25. Die analoge Aussage für die Zentren von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gilt im Allgemeinen nicht. So ist etwa die Inklusion $\mathfrak{d}_2(k) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(k)$ ein Homomorphismus von Lie-Algebren, aber $Z(\mathfrak{d}_2(k)) = \mathfrak{d}_2(k) \subsetneq kI = Z(\mathfrak{gl}_2(k))$.

1.4.2 Halbeinfache und Nilpotente Elemente

Wir wollen auch das Konzept halbeinfacher und nilpotenter Elemente auf reduktive Lie-Algebren verallgemeinern.

In $\mathrm{M}_n(k)$, sowie $\mathrm{End}_k(V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V, sind die halbeinfachen und nilpotenten Elemente über die konkrete Jordanzerlegung charakterisiert. In einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind halbeinfache und nilpotente Elemente durch die adjungierte Darstellung charakterisiert, über die sich aus der konkreten Jordanzerlegung in $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ die abstrakte Jordanzerlegung in $\mathfrak{g}$ ergibt.

Die verschiedenen Konzepte von Halbeinfachkeit und Nilpotenz in $\mathfrak{g}$ sind miteinander verträglich: $x \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, bzw. nilpotent, wenn x ad-halbeinfach, bzw. ad-nilpotent ist. Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so stimmen diese Begriffe außerdem mit denen der konkreten Jordanzerlegung überein.

Für eine reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ entsteht das Problem, dass $Z(\mathfrak{g})$ nicht notwendigerweise trivial ist. Insbesondere sind die Element in $Z(\mathfrak{g})$ sowohl ad-halbeinfach als auch ad-nilpotent. Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so können wir halbeinfache und nilpotente Element in $\mathfrak{g}$ deshalb nicht notwendigerweise über die adjungierte Darstellung beschreiben.

Beispiel 1.26. Die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$

ist abelsch und damit reduktiv. Da die adjungierte Darstellung trivial ist können wir über sie keine Rückschlüsse auf einzelne Elemente in $\mathfrak{g}$ ziehen. Insbesondere liefert die adjungierte Darstellung keine Aussagen über Halbeinfachkeit und Nilpotenz eines Elementes in $\mathfrak{g}$.

Im Allgemeinen dürfen wir also nicht darauf hoffen, die halbeinfachen und nilpotenten Elemente einer linearen reduktiven Lie-Algebra über die adjungierte Darstellung charakterisieren zu können.

Um ein Konzept von halbeinfachen und nilpotenten Elementen in einer reduktiven Lie-Algebra zu entwickeln, charakterisieren wir zunächst ad-halbeinfache und ad-nilpotente Elemente über die zugrundeliegende halbeinfache Lie-Algebra.

Lemma 1.27. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra mit $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist x genau dann* ad*-halbeinfach, bzw.* ad*-nilpotent, wenn $x_2 \in \mathfrak{s}$ halbeinfach, bzw. nilpotent ist (im Sinne einer halbeinfachen Lie-Algebra).*

Ist $\mathfrak{g}$ zusätzlich linear, so ist dies insbesondere äquivalent dazu, dass x_2 halbeinfach, bzw. nilpotent im Sinne der konkreten Jordanzerlegung ist.

Beweis. Bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{s}}.$$

Deshalb ist x genau dann $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-halbeinfach, bzw. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent, wenn x_2 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}$-halbeinfach, bzw. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}$-nilpotent ist. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist, ist dies äquivalent dazu, dass x halbeinfach, bzw. nilpotent ist. □

Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so dass sich $Z(\mathfrak{g})$ gut genug verhält, können wir deshalb die halbeinfachen und nilpotenten Elemente über die adjungierte Darstellung charakterisieren.

Lemma 1.28. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so dass $Z(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{g}$:*

1. *x ist genau dann halbeinfach, wenn x* ad*-halbeinfach ist.*
2. *x ist genau dann nilpotent, wenn x* ad*-nilpotent ist und $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

1. Ist x halbeinfach, so ist x nach Beispiel 1.6 auch ad-halbeinfach. Andererseits sei $x \in \mathfrak{g}$ ad-halbeinfach mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Lemma 1.27 ist x_2 damit halbeinfach. Da $x_1 \in Z(\mathfrak{g})$ kommutieren x_1 und x_2 auch miteinander. Da x_1 und x_2 halbeinfach sind und kommutieren ist auch $x = x_1 + x_2$ halbeinfach.

2. Ist x $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent mit $x \in \mathfrak{s}$, so ist x nach Lemma 1.27 nilpotent.

   Es sei andererseits x nilpotent. Dann ist x nach Beispiel 1.6 insbesondere ad-nilpotent und es gilt zu zeigen, dass $x \in \mathfrak{s}$. Es sei $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Annahme ist x_1 halbeinfach. Da x ad-nilpotent ist, ist x_2 nach Lemma 1.27 nilpotent. Da $x_1 \in Z(\mathfrak{g})$ kommutieren x_1 und x_2 miteinander. Damit erfüllen x_1 und x_2 alle Eigenschaften der konkreten Jordanzerlegung von x, wobei x_1 der halbeinfach Teil von x und x_2 der nilpotente Teil von x ist. Da x nilpotent ist gilt bereits $x = x_2 \in \mathfrak{s}$. □

Dies motiviert die Definition halbeinfacher und nilpotenter Elemente in einer beliebigen reduktiven Lie-Algebra.

Definition 1.29. Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra. $x \in \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn x ad-halbeinfach ist. x heißt *nilpotent*, wenn $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und x ad-nilpotent ist.

Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so besteht $Z(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen Elementen im Sinne der obigen Definition. Sind diese Elemente auch schon halbeinfach im Sinne der konkreten Jordanzerlegung, so besagt Lemma 1.28, dass die obige Definition der konkreten Jordanzerlegung entspricht. Stimmt andererseits die obige Definition mit der konkreten Jordanzerlegung, so muss $Z(\mathfrak{g})$ aus halbeinfachen Elementen bestehen. Damit ergibt sich das folgende Korollar aus Lemma 1.28.

Korollar 1.30. *Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra, so stimmt Definition 1.29 genau dann mit der konkreten Jordanzerlegung überein, wenn die Elemente in $Z(\mathfrak{g})$ halbeinfach im Sinne der konkreten Jordanzerlegung sind.*

So wie wir für lineare halbeinfache Lie-Algebren nicht zwischen der abstrakten und konkreten Jordanzerlegung unterscheiden, werden wir für lineare reduktive Lie-Algebren wie in Lemma 1.28 auch nicht zwischen halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementen im Sinne von Definition 1.29 und im Sinne der konkreten Jordanzerlegung unterscheiden.

Sofern wir zwischen halbeinfachen, bzw. nilpotenten Elementen im Sinne von Definition 1.29 und im Sinne der konkreten Jordanzerlegung unterscheiden müssen, sprechen wir von *abstrakt halbeinfach* und *abstrakt nilpotent*, sowie von *konkret halbeinfach* und *konkret nilpotent*.

Beispiel 1.31. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

1. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so stimmt Definition 1.29 mit der abstrakten Jordanzerlegung überein.

2. Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach und linear, so ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$ und Definition 1.29 stimmt mit der konkreten Jordanzerlegung überein.

3. Da $Z(\mathfrak{gl}_n(k)) = kI$ stimmt Definition 1.29 mit der konkreten Jordanzerlegung und somit dem üblichen Konzept halbeinfacher und nilpotenter Element überein.

4. Da
$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$
abelsch ist, ist $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ nicht aus konkret halbeinfachen Elementen besteht, stimmt Definition 1.29 nicht mit der konkreten Jordanzerlegung überein.

1.4.3 Cartan-Unteralgebren

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Begriff einer Cartan-Unteralgebra auf reduktive Lie-Algebren und untersuchen, wie die Cartan-Unteralgebren einer reduktiven Lie-Algebra mit denen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zusammenhängen.

Definition 1.32. Eine *Cartan-Unteralgebra* einer reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine maximale torale Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ und die Elemente von $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sind die *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$.

Bemerkung 1.33.
1. Eine CSA einer reduktiven Lie-Algebra besteht aus halbeinfachen Elementen und ist maximal mit dieser Eigenschaft.
2. Jedes halbeinfache Element $X \in \mathfrak{g}$ ist in einer CSA enthalten; es ist nämlich $kX \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, und diese ist in einer toralen Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von maximaler Dimension enthalten. Wegen der Dimensionsmaximalität ist $\mathfrak{h}$ maximal unter den toralen Unteralgebren.
3. Insbesondere ergibt sich mit $X = 0$, dass in jeder reduktiven Lie-Algebra CSA existieren.

Beispiel 1.34. Ist $\mathfrak{g}$ eine abelsche Lie-Algebra, so ist $\mathfrak{g}$ selbst die eindeutige CSA in $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{d}_n(k) \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ ist nach Beispiel 1.6 eine torale Unteralgebra. Da $\mathfrak{d}_n(k)$ nach Korollar 1.30 aus halbeinfachen Elementen besteht, ergibt sich analog zu Beispiel 1.19, dass $\mathfrak{d}_n(k)$ bereits eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist; es ergibt sich ebenfalls analog, dass alle CSA in $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zu $\mathfrak{d}_n(k)$ sind.

Um die CSA einer reduktiven Lie-Algebra zu verstehen, genügt es, die CSA der zugrundeliegenden halbeinfachen Lie-Algebra zu verstehen.

Lemma 1.35. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{a} := Z(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \{CSA \text{ in } \mathfrak{g}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{CSA \text{ in } \mathfrak{s}\}, \\ \mathfrak{h} & \longmapsto & \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \\ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' & \longleftarrow & \mathfrak{h}'. \end{array}$$

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$. $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ ist eine Unteralgebra und da $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{h}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$ ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{h}$ toral. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgt, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ und somit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$.

2. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. $x \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'$ wirkt trivial auf $\mathfrak{a}$ und halbeinfach auf $\mathfrak{s}$ und damit halbeinfach auf $\mathfrak{g}$. Also ist x halbeinfach.

3. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra. Als Schnitt zweier Unteralgebren ist $\mathfrak{h}'$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und damit auch von $\mathfrak{s}$. Für $x \in \mathfrak{h}'$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ halbeinfach und $\mathfrak{s}$ ist $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$-invariant, also ist auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}\, x = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x)|_{\mathfrak{s}}$ halbeinfach.

4. Ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA. $\mathfrak{h}'$ ist toral, und wäre $\mathfrak{h}'$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{s}$ die $\mathfrak{h}'$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ ist

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}'.$$

Deshalb wäre $\mathfrak{a} \oplus \hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra, die $\mathfrak{h}$ echt enthält, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

5. Ist $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{s}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Wäre $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gebe es eine CSA $\hat{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \hat{\mathfrak{h}}$ wäre dann

$$\mathfrak{a} \oplus (\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}) = \hat{\mathfrak{h}} \supsetneq \mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}',$$

und somit $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s} \supsetneq \mathfrak{h}'$. Da $\hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{s}$ eine torale Unteralgebra ist widerspricht dies der Maximalität von $\mathfrak{h}'$. □

Damit können wir viele Aussagen, die für CSA in halbeinfachen Lie-Algebren gelten, auf reduktive verallgemeinern. Wir beginnen mit Lemma 1.17.

Korollar 1.36. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine torale Unteralgebra. Dann ist $\mathfrak{h}$ genau dann eine CSA, wenn $\mathfrak{h}$ selbstzentralisierend ist.*

Beweis. Wegen der Reduktivität von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ so gibt es nach Lemma 1.35 eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}'$. Nach Lemma 1.17 ist $Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Da $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ ist damit

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = Z_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})) \oplus Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h}') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}.$$

Ist andererseits $\mathfrak{h}$ keine CSA, so gibt es eine CSA $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ echt enthält. Da torale Unteralgebren abelsch sind ist $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{h}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht selbstzentralisierend. □

Hieraus ergibt sich die Verträglichkeit von CSA mit passenden Unteralgebren.

Korollar 1.37. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA mit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}'$. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}'$.*

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ für jedes $x \in \mathfrak{h}$ halbeinfach. Da $\mathfrak{g}'$ eine Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}'$ ist, ist $\mathfrak{g}'$ invariant unter $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Also ist auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{g}'}$ halbeinfach. Das zeigt, dass $\mathfrak{h}$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$ ist.

Es ist $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist. Daher ist auch $Z_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, also $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.36 bereits eine CSA von $\mathfrak{g}'$. □

Bemerkung 1.38. Ist $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra, $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Unteralgebra und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA, so ist $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ zwar eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}'$, aber nicht notwendigerweise eine CSA. So ist $\mathfrak{d}_2(k)$ eine CSA von $\mathfrak{gl}_2(k)$, und

$$\mathfrak{g}' := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}$$

eine abelsche, und damit reduktive Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}'$ abelsch ist, ist aber $\mathfrak{g}'$ selbst die einzige CSA von $\mathfrak{g}'$, aber $\mathfrak{d}_2(k) \cap \mathfrak{g}' = kI$.

1.5 Innere Automorphismen

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Konjugationsbeziehung von CSA in halbeinfache Lie-Algebren ein und verallgemeinern diese auf reduktive Lie-Algebren.

Eine besondere Rolle spielen hierbei die inneren Automorphismen einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, die eine Untergruppe $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ von $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ bilden. Wir können $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ besser kontrollieren und verstehen als die gesamte Gruppe $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, und alle Konjugationsaussagen werden sich auf $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ beziehen.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $a\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\exp(a) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

ein wohldefinierter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$. Ist $b\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit a kommutiert, so ist auch ab nilpotent und

$$\exp(ab) = \exp(a)\exp(b).$$

Insbesondere ist

$$\exp(a)\exp(-a) = \exp(0) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

und somit $\exp(a) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ mit $\exp(a)^{-1} = \exp(-a)$.

Ist a zusätzlich eine Derivation von $\mathfrak{g}$, also

$$a([x,y]) = [a(x),y] + [x,a(y)] \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g},$$

so ergibt sich aus der Leibniz-Regel

$$a^n([x,y]) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [a^\ell(x), a^{n-\ell}(y)] \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{g},\, n \in \mathbb{N},$$

dass $\exp(a)$ sogar ein Lie-Algebra-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist.

Insbesondere ist damit $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ für jedes ad-nilpotente $x \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.39. Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ ist die Untergruppe, die von den Automorphismen $\exp(\operatorname{ad} x)$, mit ad-nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$, erzeugt wird. Die Elemente von $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ heißen *innere Automorphismen*.

Beispiel 1.40. $\mathfrak{sl}_2(k)$ hat die geordnete Basis $\mathcal{B} \coloneqq (e,h,f)$ mit

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e ist nilpotent und damit auch ad-nilpotent. Bezüglich $\mathcal{B}$ ist

$$\operatorname{ad} e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{ad} -e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\exp(\operatorname{ad} e) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(\operatorname{ad} -e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir machen hier noch eine weitere Beobachtung: Es gilt auch, dass

$$\exp(e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \exp(e)^{-1} = \exp(-e) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

und die Konjugation

$$\phi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{sl}_2(k), x \mapsto \exp(e)x\exp(e)^{-1}$$

wird bezüglich $\mathcal{B}$ durch

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Also ist $\phi = \exp(\operatorname{ad} e)$.

Die obige Beobachtung ist kein Zufall.

Lemma 1.41. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare Lie-Algebra und $x \in \mathfrak{g}$ (konkret) nilpotent. Dann ist*

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(x)y\exp(x)^{-1} \quad \textit{für alle } y \in \mathfrak{g}.$$

Beweis. Es ist $\operatorname{ad} x = \lambda_x + \rho_{-x}$, wobei λ_x die Linksmultiplikation mit x und ρ_{-x} die Rechtsmultiplikation mit $-x$ bezeichnet. λ_x und ρ_{-x} sind nilpotent, da x nilpotent ist. Für alle $y \in \mathfrak{g}$ ist

$$\exp(\lambda_x)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_x)^n}{n!}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) y = \lambda_{\exp(x)}(y).$$

Analog ergibt sich, dass

$$\exp(\rho_{-x}) = \rho_{\exp(-x)} = \rho_{\exp(x)^{-1}}.$$

Da λ_x und ρ_{-x} kommutieren ist daher für alle $y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \exp(\operatorname{ad} x)(y) &= \exp(\lambda_x + \rho_{-x})(y) = \exp(\lambda_x)\exp(\rho_{-x})(y) \\ &= \lambda_{\exp(x)}\rho_{\exp(x)^{-1}}(y) = \exp(x)y\exp(x)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 1.42. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine lineare reduktive Lie-Algebra mit $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k)$ und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ eine Untergruppe mit $\exp(x) \in G$ für alle nilpotenten $x \in \mathfrak{g}$. Dann ist jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus G gegeben.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es genügt die Aussage für ad-nilpotentes $x \in \mathfrak{g}$ zu zeigen. Ist $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$, so ist x_2 nach Lemma 1.27 nilpotent in $\mathfrak{g}$ sowie konkret nilpotent. Deshalb ist für jedes $y \in \mathfrak{g}$

$$\exp(\operatorname{ad} x)(y) = \exp(\operatorname{ad} x_2)(y) = \exp(x_2)y\exp(x_2)^{-1},$$

wobei nach Annahme $\exp(x_2) \in G$. □

Beispiel 1.43.

1. Jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist durch Konjugation mit einem Element $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.
2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{g}_B$ reduktiv ist. Ist $x \in \mathfrak{g}_B$ konkret nilpotent, so ist $\exp(x) \in G_B$. Deshalb ist dann ist bereits jeder innere Automorphismus durch Konjugation mit einem Element aus G_B gegeben.

Die Lie-Klammer einer reduktiven Lie-Algebra hängt nur von der Lie-Klammer der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra ab. Dementsprechend lassen sich auch die inneren Automorphismen einer reduktiven Lie-Algebra durch die inneren Automorphismen der unterliegenden halbeinfachen Lie-Algebra verstehen.

Lemma 1.44. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *reduktiv und* $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Dann ist* $\mathfrak{s}$ *invariant unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *und*

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}\mathfrak{g} &\cong \operatorname{Int}\mathfrak{s}, \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\mathfrak{s}}, \\ \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau &\leftarrow\!\shortmid \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_1 + x_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Dann ist

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x)|_{\mathfrak{s}},$$

und x ist genau dann ad-nilpotent in $\mathfrak{g}$, wenn x_2 ad-nilpotent in $\mathfrak{s}$ ist. Ferner gilt dann

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x) = \exp(0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2) = \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2).$$

Damit ist

$$\operatorname{Int}\mathfrak{s} = \langle \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \rangle$$

und

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} = \left\langle \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x) \mid x \in \mathfrak{s} \text{ ist nilpotent} \right\rangle,$$

wodurch sich die Aussage ergibt. □

Wir kommen nun zu der grundlegenden Konjugationsaussage dieses Abschnittes. Wie wir bereits in Beispiel 1.19 gesehen haben, sind je zwei CSA von $\mathfrak{sl}_n(k)$ konjugiert zueinander unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$. Dies verallgemeinert sich auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren unter der Wirkung von $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

Lemma 1.45. *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie-Algebra so sind alle CSA von* $\mathfrak{g}$ *konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$*, d.h. für je zwei CSA* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ *gibt es* $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *mit* $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

Wie wir bereits in Beispiel 1.34 gesehen haben, sind auch in der reduktiven Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$ alle CSA unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ konjugiert zueinander . Für eine beliebige reduktive Lie-Algebra ergibt sich dies als Verallgemeinerung von Lemma 1.45.

Korollar 1.46. *Ist* $\mathfrak{g}$ *eine reduktive Lie-Algebra, so sind alle CSA von* $\mathfrak{g}$ *konjugiert unter* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Nach Lemma 1.35 gibt es zwei CSA $\mathfrak{h}_1', \mathfrak{h}_2' \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1'$ und $\mathfrak{h}_2 = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.45 gibt es $\tau \in \operatorname{Int}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit $\tau(\mathfrak{h}_1') = \mathfrak{h}_2'$. Nach Lemma 1.44 ist $\sigma := \operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ mit

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = (\operatorname{id}_{Z(\mathfrak{g})} \oplus \tau)(Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_1') = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_2. \qquad □$$

Wir wollen uns noch mit der Fortsetzbarkeit von inneren Automorphismen zwischen reduktiven Lie-Algebren beschäftigen.

Lemma 1.47. *Es sei $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ eine reduktive Lie-Algebra und $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ ein reduktive Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{g}' = Z(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{s}'$. Dann lässt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}'$ zu einem inneren Automorphismus von $\mathfrak{g}$ fortsetzen.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x)$ für $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'}$-nilpotentes $x \in \mathfrak{g}'$ zu zeigen. Nach Lemma 1.27 ist x_2 ein nilpotentes Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}'$.

Mit der Inklusion $\mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ folgt aus Lemma 1.24, dass $x_2 \in \mathfrak{s}$. Aus der Funktorialität der Jordanzerlegung ergibt sich außerdem, dass x_2 bereits ein nilpotentes Element von $\mathfrak{s}$ ist.

Also ist $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} x_2$ nilpotent und damit auch $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2 = 0 \oplus \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}(x_2)$. Damit ist $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2) \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$, und da

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x_2 = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}$$

ist

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} x) = \exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x_2)|_{\mathfrak{g}'}. \qquad \square$$

Kapitel 2

Halbeinfache Orbiten

Ein klassisches Problem der linearen Algebra besteht darin, die halbeinfachen Elemente in $\mathfrak{gl}_n(k)$ zu verstehen, und der klassische Ansatz hierfür besteht darin, nicht die halbeinfachen Elemente selbst zu betrachten, sondern ihre Konjugationsklassen unter $\mathrm{GL}_n(k)$.

Konkret ergibt sich, dass jede halbeinfache Matrix konjugiert zu einer Diagonalmatrix ist, und je zwei Diagonalmatrizen genau dann konjugiert zueinander sind, wenn sie bis auf Reihenfolge die gleichen Diagonaleinträge mit gleicher Vielfachheit haben. Die Orbiten halbeinfacher Matrizen unter $\mathrm{GL}_n(k)$ werden deshalb durch k^n/S_n parametrisiert, wobei S_n durch Permutation der Einträge auf k^n wirkt.

In diesem Kapitel verallgemeinern wir dieses Vorgehen auf reduktive Lie-Algebren, um die halbeinfachen Elemente in diesen besser zu verstehen. Hierfür kehren wir zunächst zu $\mathfrak{gl}_n(k)$ zurück und leiten die obige Klassifikation erneut her. Anschließend betrachten wir eine beliebige reduktive Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ unter der Wirkung einer passenden Gruppe G und verallgemeinern das Vorgehen für $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{g}$ und G. Als Anwendung der allgemeinen Theorie klassifizieren wir anschließend die Orbiten halbeinfacher Element in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter der Wirkung von $O_{2n}(k)$ und $SO_{2n}(k)$, die Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$ unter $O_{2n+1}(k)$ und $SO_{2n+1}(k)$, sowie die Orbiten halbeinfacher Elemente in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$ unter $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$.

2.1 Motivation $\mathfrak{gl}_n(k)$

Als Motivation und zur Entwicklung der allgemeinen Theorie betrachten wir zunächst $\mathfrak{gl}_n(k)$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$.

Für $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ sei

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{SXS^{-1} \mid S \in \mathrm{GL}_n(k)\}$$

der *Orbit* von X unter $\mathrm{GL}_n(k)$. Ein Orbit $\mathcal{O}$ heißt *halbeinfach*, falls er aus halbeinfachen Elementen besteht. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ für ein halbeinfaches $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$.

Unser erster Schritt besteht darin, den Zentralisator eines halbeinfachen Elements zu verstehen.

Lemma 2.1. *Ist $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach, so ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Da X halbeinfach ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit

$$SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r), \tag{1}$$

wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, und λ_i mit Vielfachheit n_i vorkommt. Konjugation mit S ist ein Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ der X auf SXS^{-1} abbildet und damit auch $\mathfrak{g}^X$ auf $\mathfrak{g}^{SXS^{-1}}$. Es genügt daher die Aussage unter der Annahme zu zeigen, dass X eine Diagonalmatrix der Form (1) ist.

Es sei

$$X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_r) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \tag{2}$$

und $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}$. Der (i,j)-te Eintrag von AX ist $\mu_j a_{ij}$ und der (i,j)-te Eintrag von XA ist $\mu_i a_{ij}$. Deshalb ist genau dann $A \in \mathfrak{g}^X$ wenn

$$\mu_i = \mu_j \quad \text{oder} \quad a_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Aus (2) ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g}^X = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \;\middle|\; A_1 \in \mathfrak{gl}_{n_1}(k), \ldots, A_r \in \mathfrak{gl}_{n_r}(k) \right\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathfrak{g}^X \cong \mathfrak{gl}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathfrak{gl}_{n_r}(k)$$

und damit reduktiv. □

Hieraus folgt direkt die folgende Beobachtung, die sich im Folgenden als überaus nützlich erweisen wird:

Korollar 2.2. *Es sei $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$ und $X \in \mathfrak{gl}_n(k)$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Dann ist $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{d}_n(k)$.*

Als Nächstes bemerken wir, dass es zur Klassifikation der halbeinfachen Orbiten genügt, eine CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$ zu betrachten.

Lemma 2.3. *Es sei $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$, also $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'}$. X' ist halbeinfach, da $\mathcal{O}$ ein halbeinfacher Orbit ist. Also ist X' in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Da alle CSA von $\mathfrak{g}$ konjugiert unter $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ sind, und jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}$ nach Korollar 1.42 durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben ist, gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $S\mathfrak{h}'S^{-1} = \mathfrak{h}$. Insbesondere ist $SX'S^{-1} \in \mathfrak{h}$ mit

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{SX'S^{-1}}.$$ □

Damit erhalten wir schließlich die Klassifikation halbeinfacher Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch die Wirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf einer CSA von $\mathfrak{gl}_n(k)$.

Theorem 2.4. *Es sei $\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{gl}_n(k)$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und*

$$W \coloneqq N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) / Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}).$$

Ferner sei

$$\mathcal{S} := \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \textit{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{h}/W \to \mathcal{S}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X.$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Es genügt die Aussage für $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ statt für W zu zeigen.

Da $\mathfrak{h}$ eine CSA von $\mathfrak{g}$ ist besteht $\mathfrak{h}$ nach Korollar 1.30 aus halbeinfachen Elementen. Deshalb ist $\mathcal{O}_X$ für jedes $X \in \mathfrak{h}$ ein halbeinfacher Orbit. Also ist die Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathfrak{h} \to \mathcal{S}, X \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Nach Lemma 2.3 ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Für $X \in \mathfrak{h}$ ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{SXS^{-1}}$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, insbesondere also für alle $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Also ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathfrak{h}/N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{S}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert. Da $\tilde{\varphi}$ über φ faktorisiert ist auch φ surjektiv.

Für die Injektivität von φ gilt es zu zeigen, dass $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. Da $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$ mit $SX_2S^{-1} = X_1$. Also sind $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}$ die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind, folgt, dass $\mathfrak{h}, S\mathfrak{h}S^{-1} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Lemma 2.1 ist $\mathfrak{g}^{X_1}$ reduktiv, und nach Korollar 1.37 sind $\mathfrak{h}$ und $S\mathfrak{h}S^{-1}$ daher zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$. Nach Korollar 1.46 gibt es somit $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\tau(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h}$.

Ist $y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ nilpotent, so ist $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}\ y)(X_1) = 0$, also

$$\exp(y)X_1\exp(y)^{-1} = \exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}}\ y)(X_1) = X_1.$$

und somit $\exp(y) \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X_1)$. Nach Korollar 1.42 ist daher τ durch Konjugation mit einem Element $T \in Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(X)$ gegeben.

Zusammengefasst ist daher

$$(TS)X_2(TS)^{-1} = TSX_2S^{-1}T^{-1} = TX_1T^{-1} = X_1,$$

und da

$$(TS)\mathfrak{h}(TS)^{-1} = TS\mathfrak{h}S^{-1}T^{-1} = \tau(S\mathfrak{h}S^{-1}) = \mathfrak{h},$$

also ist $TS \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Das zeigt, dass X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ konjugiert sind. □

Wir wollen nun Theorem 2.4 für eine konkrete Berechnung der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ nutzen.

Um Theorem 2.4 anzuwenden müssen wir zunächst eine CSA von $\mathfrak{g}$ wählen; wir entscheiden uns für $\mathfrak{h} := \mathfrak{d}_n(k)$. Für die Berechnung von $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ und $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ ist entscheidend, dass $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält.

Aus Korollar 2.2 folgt damit bereits, dass $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ aus Diagonalmatrizen besteht, also $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{D}_n(k)$. Da $\mathfrak{d}_n(k)$ abelsch ist folgt außerdem, dass $\mathrm{D}_n(k) \subseteq Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$. Somit ist $Z_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_n(k)$.

Zur Berechnung von $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ wollen wir die folgende Aussage festhalten, die sich im weiteren Verlauf als ebenso nützlich erweisen wie Korollar 2.2.

Lemma 2.5. *Es sei* $T \subseteq \mathfrak{d}_n(k)$ *und es gebe* $X \in T$ *mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen. Unter der Konjugationswirkung von* $\mathrm{GL}_n(k)$ *auf* $\mathfrak{gl}_n(k)$ *besteht dann*

$$N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T) = \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid STS^{-1} = T\}$$

aus Monomialmatrizen.

Beweis. Es sei $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$. Außerdem sei $S = (s_{ij}) \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$. Dann ist $SXS^{-1} \in T$, also $SXS^{-1} = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ und somit

$$SX = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)S.$$

Der (i, j)-te Eintrag auf der linken Seite ist $\lambda_j s_{ij}$, der (i, j)-te Eintrag auf der rechten Seite $\mu_i s_{ij}$. Es ist also

$$\lambda_j s_{ij} = \mu_i s_{ij} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Für alle $i, j, j' = 1, \dots, n$ ist damit

$$\lambda_j s_{ij} s_{ij'} = \mu_i s_{ij} s_{ij'} = s_{ij}(\mu_i s_{ij'}) = s_{ij}(\lambda_{j'} s_{ij'}) = \lambda_{j'} s_{ij} s_{ij'}.$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ für $j \neq j'$ ist damit $s_{ij}s_{ij'} = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j \neq j'$. In jeder Zeile hat S also höchstens einen Eintrag der nicht 0 ist. Da S invertierbar ist, ist in jeder Zeile auch mindestens ein Eintrag verschieden von 0. Also ist in jeder Zeile von S genau ein Eintrag verschieden von 0.

Da mit $S \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ auch $S^{-1} \in N_{\mathrm{GL}_n(k)}(T)$ gibt es andererseits auch $\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \in T$ mit

$$XS = S\,\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Hieraus ergibt sich analog zur obigen Rechnung, dass S in jeder Spalte genau einen Eintrag hat, der verschieden von 0 ist. □

Da $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält folgt aus Lemma 2.5, dass $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})$ aus Monomialmatrizen besteht, also $N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_n(k)$. Andererseits wird $\mathfrak{h}$ von $\mathrm{Mon}_n(k)$ normalisiert. Also ist $N_{\mathrm{GL}_n(k)} = \mathrm{Mon}_n(k)$.

Somit ist nun

$$\begin{aligned} W &:= N_{\mathrm{GL}_n(k)}(\mathfrak{h})/Z_{\mathrm{GL}_n(k)} = \mathrm{Mon}_n(k)/\,\mathrm{D}_n(k) \\ &= (\mathrm{D}_n(k) \rtimes \mathrm{P}_n(k))/\,\mathrm{D}_n(k) \cong \mathrm{P}_n(k) \cong S_n, \end{aligned}$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht der Permutation der Diagonaleinträge durch S_n. Durch die zusätzliche Identifikation

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ergibt sich, dass die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{gl}_n(k)$ klassifiziert sind durch

$$\begin{aligned} k^n/S_n &\xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{gl}_n(k) \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, \\ [(\lambda_1, \dots, \lambda_n)] &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}, \end{aligned}$$

wobei S_n auf k^n durch Permutation der Einträge wirkt.

2.2 Das allgemeine Vorgehen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Vorgehen im Falle von $\mathfrak{gl}_n(k)$ bezüglich der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf beliebige reduktive Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ unter Wirkung einer passenden Gruppe G. Entscheidend ist hierbei, dass wir, wie bereits im Falle von $\mathfrak{gl}_n(k)$, Cartan-Unteralgebren und ihr Konjugationsverhalten ausnutzen wollen. Im Fall von $\mathfrak{gl}_n(k)$ haben wir hierfür genutzt, dass jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben ist. Im allgemeinen Fall wird dies die entscheidende Bedingung sein, die wir an G stellen.

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und G eine Gruppe, die durch Lie-Algebra-Automorphismen auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\mathcal{O}_X \coloneqq \{s \cdot X \mid s \in G\}$$

der *Orbit* von X unter G. Ein Orbit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\mathcal{O}$ aus halbeinfachen Elementen besteht. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist

$$\operatorname{ad}\phi(X) = \phi(\operatorname{ad} X)\phi^{-1} \quad \text{für alle } \phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}.$$

Daher ist X genau dann halbeinfach wenn $\mathcal{O}_X$ ein halbeinfacher Orbit ist.

Für das weitere Vorgehen beschränken wir uns auf solche Gruppen und Gruppenwirkungen, so dass es für jedes $\sigma \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ ein $s \in G$ gibt, das durch σ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Hierfür ergibt sich eine Vielzahl von Beispielen.

Beispiel 2.6. 1. $\mathrm{GL}_n(k)$ wirkt durch Konjugation auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und nach Korollar 1.42 ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{gl}_n(k)$ durch Konjugation mit einem Element aus $\mathrm{GL}_n(k)$ gegeben.

Analog ergibt sich auch die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{sl}_n(k)$.

2. Es sei $B \in \mathrm{M}_n(k)$, so dass $\mathfrak{g}_B$ reduktiv ist. Dann wirkt G_B durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_B$, und für nilpotentes $x \in \mathfrak{g}_B$ auch $\exp(x) \in G_B$. Also ist nach Korollar 1.42 jeder innere Automorphismus durch Konjugaton mit einem Element aus G_B gegeben. Hieraus ergeben sich mehrere konkrete Beispiele:

   (a) Für $B = 0$ ergibt sich erneut die Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$

   (b) Für die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{M}_n(k)$ ergibt sich die Konjugationswirkung der orthogonalen Gruppe

   $$O_n(k) \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T = S^{-1}\}$$

   auf den schiefsymmetrischen Matrizen

   $$\mathfrak{so}_n(k) \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_n(k) \mid A^T = -A\}.$$

   (c) Für

   $$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k)$$

   ergibt sich die Konjugationswirkung der symplektischen Gruppe

   $$\mathrm{Sp}_{2n}(k) \coloneqq \{S \in \mathrm{GL}_n(k) \mid S^T \Omega S = \Omega\}$$

   auf der symplektischen Lie-Algebra

   $$\mathfrak{sp}_{2n}(k) \coloneqq \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T\Omega + \Omega A = 0\}$$

3. Ist $G \subseteq \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, so wirkt G auf natürliche Weise auf $\mathfrak{g}$. G erfüllt die gewünschte Bedingung genau dann, wenn $\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq G$. Sonderfälle hiervon sind $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ selbst sowie $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

Ist $X \in \mathrm{M}_n(k)$ nilpotent, so ist $\det\exp(X) = 1$: Da X nilpotent ist gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(k)$, so dass SXS^{-1} eine echte obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist auch $\sum_{m=1}^{\infty}(SXS^{-1})^m/m!$ eine echte obere Dreiecksmatrix und somit $\exp(SXS^{-1})$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Deshalb ist

$$1 = \det(\exp(SXS^{-1})) = \det(S\exp(X)S^{-1}) = \det(\exp(X)).$$

Damit ergibt sich, dass man sich in vielen der obigen Fällen auf Elemente mit Determinante 1 einschränken kann.

4. (a) Statt der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_(k)$ und $\mathfrak{sl}_n(k)$ lässt sich auf die Konjugationswirkung von $\mathrm{SL}_n(k)$ auf $\mathfrak{gl}_n(k)$ und $\mathfrak{sl}_n(k)$ betrachten.

   (b) Ist $B \in \mathrm{M}_n(k)$ mit $\mathfrak{g}_B$ reduktiv, so ist jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{g}_B$ bereits durch Konjugation mit einem Element aus

$$SG_B \coloneqq \{S \in G_B \mid \det(S) = 1\}$$

   gegeben. Inbesondere ergibt sich für $B = I$ die Konjugationswirkung von

$$SO_n(k) \coloneqq \{S \in O_n(k) \mid \det S = 1\}$$

   auf $\mathfrak{so}_n(k)$.

   (c) Ist $\mathfrak{g}$ reduktiv, so ist für ad-nilpotente $X \in \mathfrak{g}$ bereits $\exp(\operatorname{ad} X) \in \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$ und somit

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g} \subseteq \{\phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \mid \det\phi = 1\}.$$

Der erste Schritt besteht wie im Fall von $\mathfrak{gl}_n(k)$ darin, die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zu verstehen.

Proposition 2.7. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach und $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA die X enthält. Es seien $\Phi \coloneqq \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ die entsprechenden Wurzeln und*

$$\Phi_X \coloneqq \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(X) = 0\}.$$

Dann ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha$$

und $\mathfrak{g}^X$ ist reduktiv.

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Für $Y \in \mathfrak{g}$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha\in\Phi} Y_\alpha$ bezüglich (3) ist

$$[X, Y] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(X) Y_\alpha.$$

Wegen der Direktheit der Zerlegung (3) folgt, dass genau dann $Y \in \mathfrak{g}^X$ wenn $\alpha(X)Y_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Also ist

$$\mathfrak{g}^X = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{4}$$

Für $Z(\mathfrak{g}^X)$ ergibt sich, dass

$$Z(\mathfrak{g}^X) = \bigcap_{\alpha \in \Phi_X} \ker \alpha. \tag{5}$$

Es ist nämlich

$$Z(\mathfrak{g}^X) = Z_{\mathfrak{g}^X}(\mathfrak{g}^X) \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$$

und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist

$$[Y, \mathfrak{g}^X] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_X} \alpha(Y)\mathfrak{g}_\alpha,$$

also $[Y, \mathfrak{g}^X] = 0$ genau dann wenn $\alpha(Y) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi_X$.

Für die Reduktivität von $\mathfrak{g}^X$ gilt es zu zeigen, dass $Z(\mathfrak{g}^X) = \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $Z(\mathfrak{g}^X) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. Entscheidend hierfür ist die folgende Beobachtung:

Behauptung 1. Es gibt kein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$.

Beweis. Angenommen es gebe $\alpha \in \Phi_X$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Da $\alpha \in \Phi_X$ ist auch $-\alpha \in \Phi_X$ und somit $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}^X$. Damit ist auch $kh_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha} = [h_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist. Es ist also

$$S_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus kh_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ nicht auflösbar ist. □

Als erste Annäherung ergibt sich, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$. Andernfalls gebe es $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ mit $Y = Y_0 + \sum_{\alpha \in \Phi_X} Y_\alpha$ bezüglich (4) und

$$\Psi \coloneqq \{\alpha \in \Phi_X \mid Y_\alpha \neq 0\} \neq \emptyset.$$

Da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist für alle $h \in \mathfrak{h}$ und $\ell \geq 1$ auch

$$\operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Behauptung 2. Es gibt $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\alpha(h) \neq \beta(h)$ für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Beweis. Wegen des natürlichen Isomorphismus $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^{**}$ genügt es ein Element $\varphi \in \mathfrak{h}^{**}$ zu konstruieren, so dass $\varphi(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq \beta$.

Da $\mathfrak{h}^* = \operatorname{span}_k \Phi$ gibt es eine k-Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ von $\mathfrak{h}^*$. k ist algebraisch abgeschlossen und somit unendlichdimensional über $\mathbb{Q}$. Also gibt es $z_1, \dots, z_n \in k$, die linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Es sei $\varphi\colon \mathfrak{h}^* \to k$ die k-lineare Abbildung mit $\varphi(\alpha_i) = z_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Per Konstruktion ist φ auf $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ injektiv. Da $0 \notin \Phi$ und $\Phi \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ erfüllt φ die gewünschten Bedingungen. □

Es sei $h \in \mathfrak{h}$ wie in Behauptung 2 und $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$. Für $\ell = 1, \dots, n$ sei

$$Z_\ell := \operatorname{ad}(h)^\ell(Y) = \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha(h)^\ell Y_\alpha \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X.$$

Da die Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ eindimensional sind, ist $(Y_{\alpha_1}, \dots, Y_{\alpha_n})$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$. Damit ist auch $(Z_1, \dots, Z_n)$ eine Basis von $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, da

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \alpha_1(h) & \alpha_1(h)^2 & \cdots & \alpha_1(h)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n(h) & \alpha_n(h)^2 & \cdots & \alpha_n(h)^n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(h) & \cdots & \alpha_1(h)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n(h) & \cdots & \alpha_n(h)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1(h) \cdots \alpha_n(h) \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j(h) - \alpha_i(h)) \neq 0. \end{aligned}$$

Da $Z_1, \dots, Z_n \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ist damit $\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$, also $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ für alle $\alpha \in \Psi$. Da $\Psi \neq \emptyset$ gibt deshalb $\alpha \in \Psi$ mit $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$. Dies steht im Widerspruch zu Behauptung 1. Also ist $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$.

Ist $Y \in \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq \mathfrak{h}$ mit $Y \notin Z(\mathfrak{g}^X)$, so gibt es nach (5) ein $\alpha \in \Phi_X$ mit $\alpha(Y) \neq 0$. Da $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X$ ein Ideal ist, ist damit

$$\mathfrak{g}_\alpha = [Y, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{g}^X,$$

im Widerspruch zu Behauptung 1. Insgesamt zeigt dies, dass $\operatorname{rad} \mathfrak{g}^X \subseteq Z(\mathfrak{g}^X)$. □

Korollar 2.8. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie-Algebra und $X \in \mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann ist $\mathfrak{g}^X$ reduktiv.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $X = X_1 + X_2$ bezüglich $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$. Nach Lemma 1.27 ist X_2 ein halbeinfaches Element der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$. Damit ist $\mathfrak{s}^{X_2}$ nach Proposition 2.7 reduktiv und somit auch

$$\mathfrak{g}^X = Z(\mathfrak{g})^{X_1} \oplus \mathfrak{s}^{X_2} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}^{X_2},$$

da $Z(\mathfrak{g})$ abelsch ist. □

Wie bereits im Fall von $\mathfrak{gl}_n(k)$ wollen wir uns zur Klassifikation der halbeinfachen Orbiten auf eine CSA von $\mathfrak{g}$ einschränken können. Die Rechtfertigung hierfür liefern uns die folgenden Aussagen.

Lemma 2.9. *Es seien $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ zwei CSA. Dann gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Beweis. Nach Korollar 1.46 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ mit $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$ und nach Annahme gibt es $s \in G$, das durch σ wirkt, für das also $s \cdot \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$. □

Korollar 2.10. *Es sei $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ eine CSA und $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ ein halbeinfacher Orbit. Dann gibt es $X \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$.*

Beweis. Es sei $X' \in \mathcal{O}$. Dann ist X' halbeinfach und in einer CSA $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{g}$ enthalten. Nach Lemma 2.9 gibt es $s \in G$ mit $s \cdot \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Damit ist $s \cdot X' \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{s \cdot X'}$. □

Die Klassifikation halbeinfacher Orbiten in $\mathfrak{g}$ ergibt sich nun als direkte Verallgemeinerung von Theorem 2.4.

Theorem 2.11. *Es sei* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *eine CSA und*

$$W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; G) := N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}).$$

Dann ist die Abbildung

$$\Phi\colon \mathfrak{h}/W \to \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \textit{ ist ein halbeinfacher Orbit}\}, [X] \mapsto \mathcal{O}_X$$

wohldefiniert und bijektiv.

Beweis. Es genügt die Aussage für $N_G(\mathfrak{h})$ statt für W zu zeigen.

Da $\mathfrak{h}$ aus halbeinfachen Elementen besteht und $\mathcal{O}_{s \cdot X} = \mathcal{O}_X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $s \in G$ ist Φ wohldefiniert. Nach Korollar 2.10 ist Φ surjektiv.

Es seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$. Für die Injektivität von Φ gilt es zu zeigen, dass X_1 und X_2 unter G konjugiert sind. Da $X_1 \in \mathcal{O}_{X_1} = \mathcal{O}_{X_2}$ gibt es $s \in G$ mit $s \cdot X_2 = X_1$. $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ sind zwei CSA von $\mathfrak{g}$, die X_1 enthalten. Da CSA abelsch sind ist bereits $\mathfrak{h}, s \cdot \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}^{X_1}$, wobei $\mathfrak{g}^{X_1}$ nach Proposition 2.7 reduktiv ist. Nach Korollar 1.37 sind $\mathfrak{h}$ und $s \cdot \mathfrak{h}$ zwei CSA von $\mathfrak{g}^{X_1}$.

Nach Korollar 1.46 gibt es $\sigma \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ mit $\sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Für nilpotentes $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ ist $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = 0$ und somit

$$\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)^n}{n!}(X_1) = X_1.$$

Da $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ von Elementen der Form $\exp(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{X_1}} Y)$ für nilpotente $Y \in \mathfrak{g}^{X_1}$ erzeugt wird, wird X_1 von jedem inneren Automorphismus von $\operatorname{Int} \mathfrak{g}^{X_1}$ stabilisiert. Insbesondere ist $\sigma(X_1) = X_1$.

Nach Lemma 1.47 lässt sich σ zu einem inneren Automorphismus $\tau \in \operatorname{Int} \mathfrak{g}$ fortsetzen. Nach Annahme gibt es $t \in G$, das durch τ auf $\mathfrak{g}$ wirkt. Zum einen ist

$$t \cdot s \cdot X_2 = t \cdot X_1 = \tau(X_1) = \sigma(X_1) = X_1,$$

und zum anderen ist

$$t \cdot s \cdot \mathfrak{h} = \tau(s \cdot \mathfrak{h}) = \sigma(s \cdot \mathfrak{h}) = \mathfrak{h},$$

also $t \cdot s \in N_G(\mathfrak{h})$. Somit sind X_2 und X_1 durch ein Element aus $N_G(\mathfrak{h})$ konjugiert. □

Kapitel 3

Halbeinfache Orbiten in klassischen Lie-Algebren

3.1 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$

In diesem Abschnitt bestimmen wir als Anwendung der allgemeinen Theorie die halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter der Konjugationswirkung von $O_{2n}(k)$. Nach Theorem 2.11 genügt es hierfür eine CSA $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{so}_{2n}(k)$ und den Quotienten $\mathfrak{h}/W$ für $W(\mathfrak{so}_{2n}(k), \mathfrak{h}; O_{2n}(k)) = N_{O_{2n}(k)}(\mathfrak{h})/Z_{O_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ zu berechnen.

3.1.1 Alternative Definition

Statt mit $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $O_{2n}(k)$ selbst wollen wir mit einer anden Lie-Algebra $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}_{2n}(k)$ und Gruppe $G \cong O_{2n}(k)$ arbeiten, mit denen wir besser arbeiten können.

Konkret betrachten wir für die quadratische Matrix

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(k).$$

die entsprechende Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} \coloneqq \mathfrak{g}_J = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^T J + JA = 0\},$$

und Isometriegruppe

$$G \coloneqq G_J = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^T JS = J\}$$

Per Definition ist $\mathfrak{so}_{2n}(k) = \mathfrak{g}_I$ und $O_{2n}(k) = G_I$ für die Einheitsmatrix $I \in \mathrm{M}_{2n}(k)$. Dabei beschreiben I und J die gleiche Bilinearform bezüglich zweier verschiedener Basen. Bezüglich der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_{2n})$ von k^{2n} beschreibt I die Standardbilinearform auf k^{2n}. Ist $i \in k$ mit $i^2 = -1$, so wird die

Standardbilinearform bezüglich der Basis $(e'_1, \dots, e'_{2n})$ von k^{2n} mit

$$\begin{aligned} e'_1 &:= \frac{e_1 + ie_{2n}}{\sqrt{2}}, & e'_{2n} &:= \frac{e_1 - ie_{2n}}{\sqrt{2}}, \\ e'_2 &:= \frac{e_2 + ie_{2n-1}}{\sqrt{2}}, & e'_{2n-1} &:= \frac{e_2 - ie_{2n-1}}{\sqrt{2}}, \\ &\vdots & &\vdots \\ e'_n &:= \frac{e_n + ie_{n+1}}{\sqrt{2}}, & e'_{n+1} &:= \frac{e_n - ie_{n+1}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

von J beschrieben Insbesondere ergibt sich mit der entsprechenden Basiswechselmatrix

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & i & -i & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ i & & & & & -i \end{pmatrix},$$

für die $\Gamma^T I \Gamma = J$ gilt, ein Isomorphismus von Lie-Algebren

$$\Phi\colon \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_J \to \mathfrak{g}_I = \mathfrak{so}_{2n}(k), A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}.$$

und ein Isomorphismen von Gruppen

$$\varphi\colon G = G_J \to G_I = O_{2n}(k), S \mapsto \Gamma S \Gamma^{-1}.$$

Φ und φ sind mit der jeweiligen Gruppenwirkung durch Konjugation verträglich, weshalb für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $S \in G$

$$\varphi(S) \cdot \Phi(X) = \Phi(S \cdot X).$$

Also ist für alle $X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{O}_X) &= \{\Phi(A) \mid A \in \mathcal{O}_X\} = \{\Phi(S \cdot X) \mid S \in G\} \\ &= \{\varphi(S) \cdot \Phi(X) \mid S \in G\} = \{T \cdot \Phi(X) \mid T \in O_{2n}(k)\} \\ &= \mathcal{O}_{\Phi(X)}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $X \in \mathfrak{g}$ genau dann halbeinfach, wenn $\Phi(X)$ halbeinfach ist. Die Klassifikation halbeinfacher Orbiten in $\mathfrak{g}$ unter der Konjugationswirkung von G ist also äquivalent zu der Klassifikation halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $O_{2n}(k)$.

Ähnlich wie sich $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $O_{2n}(k)$ durch Matrixtransposition beschreiben lassen, ergeben sich $\mathfrak{g}$ und G durch die Anti-Transponierte.

Definition 3.1. Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{M}_n(k)$. Die *Anti-Transponierte* von A ist

$$A^S := (a_{n+1-j,n+1-i})_{1 \le i,j \le n}.$$

A^S ist das Transponierte von A an der Anti-Diagonalen, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^S = \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Die Anti-Transponierte kann auch über die Transponierte beschrieben werden.

Lemma 3.2. *Für alle* $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(k)$ *ist*

$$A^S = JA^TJ,$$

wobei

$$J := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(k).$$

Beweis. Es ist

$$JA^TJ = J(a_{ij})_{ij}^TJ = J(a_{ji})_{ij}J = J(a_{j,n+1-i})_{ij} = (a_{n+1-j,n+1-i})_{ij} = A^S.$$

□

Da $J^2 = I$ ist ergibt sich damit, dass

$$\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(k) \mid A^S = -A\}.$$

und

$$G = \{S \in \mathrm{GL}_{2n}(k) \mid S^{-1} = S^S\}.$$

Wir halten als Korollar zu Lemma 3.2 noch einige grundlegende Eigeschaften der Anti-Transponierte fest.

Korollar 3.3.
1. *Für* $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$ *ist* $(AB)^S = B^SA^S$.
2. *Für alle* $A \in \mathrm{M}_n(k)$ *ist* $(A^S)^S = A$.
3. *Für* $U \in \{\mathfrak{d}_n(k), \mathrm{D}_n(k), \mathrm{P}_n(k), \mathrm{Mon}_n(k)\}$ *ist für alle* $X \in \mathrm{M}_n(k)$ *genau dann* $X \in U$*, wenn* $X^S \in U$.

3.1.2 Cartan-Unteralgebra

Es sei $\mathfrak{h} := \mathfrak{g} \cap \mathfrak{d}_{2n}(k)$, also

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}.$$

$\mathfrak{d}_{2n}(k)$ ist eine CSA von $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$, also ist $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{d}_{2n}(k)$ eine torale Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$ und damit auch von $\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix X mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält, ist nach Korollar 2.2

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{\mathfrak{gl}_{2n}(k)}(X) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}.$$

Also ist $\mathfrak{h}$ selbstzentralisierend und damit nach Korollar 1.36 eine CSA von $\mathfrak{g}$.

Für $a_1, \dots, a_n \in k$ schreiben wir im Folgenden

$$H(a_1, \dots, a_n) := \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \in \mathfrak{h}.$$

Unter dem Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{so}_{2n}(k), A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}$ korrespondiert $\mathfrak{h}$ zu der Lie-Unteralgebra

$$\mathfrak{h}' := \{\mathrm{adiag}(a_1, \dots, a_n, -a_n, \dots, -a_1) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}$$

von $\mathfrak{so}_{2n}(k)$. Insbesondere ist $\mathfrak{h}'$ daher eine CSA von $\mathfrak{so}_{2n}(k)$. Um die entsprechende Rechnung abzukürzen schreiben wir für $a, b, c, d \in k$

$$G(a,b,c,d) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & -d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & -d \end{pmatrix},$$

Inbesondere ist $\Gamma = G(1,1,i,-i)$, und es gilt $JG(a,b,c,d) = G(c,d,a,b)$. Für alle $H(a_1,\ldots,a_n) \in \mathfrak{h}$ ist damit

$$\begin{aligned} &\Gamma H(a_1,\ldots,a_n)\Gamma^{-1} = H(-a_1,\ldots,-a_n)G(-1,1,i,i)\Gamma^{-1} \\ &= iH(-a_1,\ldots,-a_n)G(i,-i,1,1)\Gamma^{-1} = iH(-a_1,\ldots,-a_n)JG(1,1,i,-i)\Gamma^{-1} \\ &= iH(-a_1,\ldots,-a_n)J\Gamma\Gamma^{-1} = i\operatorname{diag}(-a_1,\ldots,-a_n,a_n,\ldots,a_1)J \\ &= \operatorname{adiag}(ia_1,\ldots,ia_n,-ia_n,\ldots,-ia_1). \end{aligned}$$

3.1.3 Normalisator und Zentralisator

Bestimmung von $N_G(\mathfrak{h})$ und $Z_G(\mathfrak{h})$

Zur Berechnung von $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h};G)$ bestimmen wir zunächst $N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ sowie $Z_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{GL}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{gl}_{2n}(k)$, da

$$N_G(\mathfrak{h}) = N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \quad \text{und} \quad Z_G(\mathfrak{h}) = Z_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G.$$

Da $\mathfrak{h}$ eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen enthält, ist $Z_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k)$ nach Korollar 2.2, und somit

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G.$$

Nach Lemma 2.5 ist außerdem $N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_{2n}(k)$. Deshalb ist auch $N_G(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_{2n}(k)$.

Wir wollen die Zerlegung $\mathrm{Mon}_{2n}(k) = \mathrm{D}_{2n}(k) \rtimes \mathrm{P}_{2n}(k)$ auf den Normalisator $N_G(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_{2n}(k)$ einschränken. Hierfür seien $\mathcal{N}_\mathrm{D} \coloneqq N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{D}_n(k)$ und $\mathcal{N}_\mathrm{P} \coloneqq N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{P}_n(k)$. Wie bereits gezeigt ist

$$\mathcal{N}_\mathrm{D} = N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{D}_{2n}(k) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G \cap \mathrm{D}_{2n}(k) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G.$$

Behauptung 1. Es ist $N_G(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_\mathrm{D} \rtimes \mathcal{N}_\mathrm{P}$.

Beweis. Da $\mathrm{Mon}_{2n}(k) = \mathrm{D}_{2n}(k) \rtimes \mathrm{P}_{2n}(k)$ ist $\mathrm{D}_{2n}(k) \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = 1$ und $\mathrm{D}_{2n}(k)$ ist normal in $\mathrm{Mon}_{2n}(k)$. Deshalb ist auch $\mathcal{N}_\mathrm{D} \cap \mathcal{N}_\mathrm{P} = 1$ und $\mathcal{N}_\mathrm{D} = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap N_G(\mathfrak{h})$ ist normal in $N_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{Mon}_{2n}(k) \cap N_G(\mathfrak{h})$. Es genügt daher zu zeigen, dass $N_G(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_\mathrm{D}\mathcal{N}_\mathrm{P} = \{DP \mid D \in \mathcal{N}_\mathrm{D}, P \in \mathcal{N}_\mathrm{P}\}$.

Es sei $M \in N_G(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{Mon}_{2n}(k)$. Da $\mathrm{Mon}_{2n}(k) = \mathrm{D}_{2n}(k) \rtimes \mathrm{P}_{2n}(k)$ gibt es eindeutige $D \in \mathrm{D}_{2n}(k)$ und $P \in \mathrm{P}_{2n}(k)$ mit $M = DP$. Es gilt zu zeigen, dass $D \in \mathcal{N}_\mathrm{D}$ und $P \in \mathcal{N}_\mathrm{P}$.

Da $M \in G$ ist $MM^S = I$ und somit

$$I = MM^S = DP(DP)^S = DPP^SD^S$$

gilt
$$PP^S = D^{-1}(D^S)^{-1} = (D^S D)^{-1}.$$

Da PP^S eine Permutationsmatrix und $(D^S D)^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, folgt, dass bereits
$$PP^S = I = DD^S.$$

Also ist $D \in G$ und somit $D \in \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G = \mathcal{N}_{\mathrm{D}}$. Inbesondere ist $D \in N_G(\mathfrak{h})$ und somit auch $P = D^{-1}M \in N_G(\mathfrak{h})$. Damit ist $P \in \mathrm{P}_{2n}(k) \cap G = \mathcal{N}_{\mathrm{P}}$. $\square$

Da $N_G(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \mathcal{N}_{\mathrm{P}}$ und $Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G = \mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ ist

$$W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; G) = N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = (\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \mathcal{N}_{\mathrm{P}})/\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \cong \mathcal{N}_{\mathrm{P}}$$

und die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht der Konjugationswirkung von $\mathcal{N}_{\mathrm{P}}$.

Bestimmung von $\mathcal{N}_{\mathrm{P}}$

Zur Bestimmung von

$$\mathcal{N}_{\mathrm{P}} = N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = N_{\mathrm{GL}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \cap \mathrm{P}_{2n}(k) = N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G$$

genügt es, zunächst $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ unter der Konjugationswirkung von $\mathrm{P}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{g}$ zu berechnen, und dann jene $P \in N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}$ zu ermitteln, welche die Bedingung $P^{-1} = P^S$ erfüllen. Da $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{d}_{2n}(k)$ und $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ invariant $\mathrm{P}_{2n}(k)$ ist, genügt es zur Berechnung von $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ die Konjugationwirkung von $\mathrm{P}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ zu betrachten.

$\mathrm{P}_{2n}(k)$ wirkt auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ durch Permutation der Diagonaleinträge; im mit dieser Wirkung besser arbeiten zu können, identifizieren wir $\mathrm{P}_{2n}(k)$ mit S_{2n}.

Es sei $S_{2n} \cong \mathrm{P}_{2n}(k), \pi \mapsto A_\pi$ der eindeutige Isomorphismus mit

$$A_\pi e_i = Ae_{\pi(i)} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, 2n,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_{2n})$ die Standardbasis von k^{2n} ist. Die Konjugationswirkung von $\mathrm{P}_{2n}(k)$ auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$ entspricht unter diesem Isomorphismus der Wirkung

$$\pi \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\pi^{-1}(2n)})$$

von S_{2n} auf $\mathfrak{d}_{2n}(k)$, und $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ korresponiert zu $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Dass $A_\pi \in G$, also $A_\pi^S = A_\pi^{-1}$, ist wegen

$$A_\pi^S = JA_\pi^T J = JA_\pi^{-1} J$$

und $J = J^{-1}$ äquivalent dazu, dass $A_\pi \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J)$. Da $J = A_{\pi_J}$ für $\pi_J \in S_{2n}$ mit
$$\pi_J(i) := 2n + 1 - i \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, 2n$$

ist genau dann $A_\pi \in Z_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(J)$ wenn $\pi \in Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. Unter dem Isomorphismus $\mathrm{P}_{2n}(k) \cong S_{2n}$ korrespondiert deshalb nicht nur $N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h})$ zu $N_{S_{2n}}(k)$, sondern auch $\mathrm{P}_{2n}(k) \cap G$ zu $Z_{S_{2n}}(\pi_J)$, und somit

$$N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \quad \text{zu} \quad N_{S_{2n}}(k) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J).$$

Bestimmung von $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$

$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ setzt sich aus zwei speziellen Arten von Permutationen zusammen.
Für $\pi \in S_n$ sei $\tau_\pi \in S_{2n}$ mit

$$\left.\begin{aligned} \tau_\pi(i) &:= \pi(i) \quad \text{und} \\ \tau_\pi(2n+1-i) &:= 2n+1-\pi(i) \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Behauptung 2. 1. Die Abbildung $S_n \to S_{2n}, \pi \mapsto \tau_\pi$ ein Gruppenmonomorphismus.

2. Für $\pi \in S_n$ und $H(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}$ ist

$$\tau_\pi \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}\right).$$

Insbesondere ist $\tau_\pi \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Beweis. 1. Für $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ ist für alle $i = 1, \dots n$

$$\tau_{\pi_1}\tau_{\pi_2}(i) = \tau_{\pi_1}(\pi_2(i)) = \pi_1(\pi_2(i)) = \tau_{\pi_1\pi_2}(i)$$

sowie

$$\begin{aligned} \tau_{\pi_1}\tau_{\pi_2}(2n+1-i) &= \tau_{\pi_1}(2n+1-\pi_2(i)) \\ &= 2n+1-\pi_1\pi_2(i) = \tau_{\pi_1\pi_2}(2n+1-i). \end{aligned}$$

Sind $\pi, \pi' \in S_n$ mit $\tau_\pi = \tau_{\pi'}$ so ist für alle $i = 1, \dots, n$

$$\pi(i) = \tau_\pi(i) = \tau_{\pi'}(i) = \pi'(i)$$

und somit $\pi = \pi'$.

2. Es ist

$$H(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_{2n})$$

mit

$$a_{2n+1-i} = -a_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Da $\tau_\pi^{-1} = \tau_{\pi^{-1}}$ ist somit

$$\begin{aligned} \tau_\pi \cdot H(a_1, \dots, a_n) &= \operatorname{diag}\left(a_{\tau_\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\tau_\pi^{-1}(2n)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\tau_{\pi^{-1}}(1)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(n)}, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-n)}, \dots, a_{\tau_{\pi^{-1}}(2n+1-1)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, a_{2n+1-\pi^{-1}(n)}, \dots, a_{2n+1-\pi^{-1}(1)}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}, -a_{\pi^{-1}(n)}, \dots, -a_{\pi^{-1}(1)}\right) \\ &= H\left(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)}\right). \end{aligned}$$

□

Für $\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2)^n = \{1, -1\}^n$ sei $\sigma_\varepsilon \in S_{2n}$ mit

$$\sigma_\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (i,\ 2n+1-i)^{\delta_{\varepsilon_i,-1}}.$$

σ_ε vertauscht also i und $2n+1-i$, falls $\varepsilon_i = -1$, und hält sie fest, falls $\varepsilon_i = 1$.

Behauptung 3. 1. Die Abbildung $(\mathbb{Z}/2)^n \to S_{2n}, \varepsilon \mapsto \sigma_\varepsilon$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

2. Für alle $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2)^n$ und $H(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{h}$ ist

$$\sigma_\varepsilon \cdot H(a_1, \ldots, a_n) = H(\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_n a_n)$$

Insbesondere ist $\sigma_\varepsilon \cdot X \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.

Beweis. 1. Die Abbildung $(\{1, -1\}, \cdot) \to (\{0, 1\}, +), x \mapsto \delta_{x,-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Für $\varepsilon, \varepsilon' \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ und $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ ist deshalb

$$\begin{aligned}
\sigma_\varepsilon \sigma_{\varepsilon'} &= \prod_{i=1}^n (i,\ 2n+1-i)^{\delta_{\varepsilon_i,-1}} \cdot \prod_{i=1}^n (i,\ 2n+1-i)^{\delta_{\varepsilon'_i,-1}} \\
&= \prod_{i=1}^n (i,\ 2n+1-i)^{\delta_{\varepsilon_i,-1} + \delta_{\varepsilon'_i,-1}} = \prod_{i=1}^n (i,\ 2n+1-i)^{\delta_{\varepsilon_i \cdot \varepsilon'_i,-1}} \\
&= \sigma_{\varepsilon+\varepsilon'}.
\end{aligned}$$

Ist $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\sigma_\varepsilon = 1$, so ist $\sigma_\varepsilon(i) = i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und deshalb $\varepsilon_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots n$.

2. Es sei
$$\sigma_\varepsilon \cdot H(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_{2n}) \in \mathfrak{d}_{2n}(k).$$
Es ist $H(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{2n})$ mit $a_{2n+1-i} = -a_i$ für $i = 1, \ldots, n$, und es gilt $\sigma_\varepsilon^{-1} = \sigma_{\varepsilon^{-1}} = \sigma_\varepsilon$. Für $1 \leq i \leq n$ mit $\varepsilon_i = 1$ ist deshalb

$$b_i = a_{\sigma_\varepsilon^{-1}(i)} = a_{\sigma_\varepsilon(i)} = a_i = \varepsilon_i a_i,$$

und für $\varepsilon_i = -1$ ist

$$b_i = a_{\sigma_\varepsilon^{-1}(i)} = a_{\sigma_\varepsilon(i)} = a_{2n+1-i} = -a_i = \varepsilon_i a_i. \qquad \square$$

Der Normalisator $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ setzt bereits vollständig aus den beiden Untergruppen

$$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} := \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_{S_n} := \{\tau_\pi \mid \pi \in S_n\}$$

zusammen.

Proposition 3.4. *Es ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$. Im einzelnen gilt:*

1. *Es ist $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \mathcal{N}_{S_n}$, d.h. jedes $\omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ ist von der Form $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$ für passende $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n$ und $\pi \in S_n$.*
2. *Es gilt $\mathcal{N}_{S_n} \cap \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} = 1$.*
3. *$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2}$ ist normal in $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$.*

Beweis. 1. Es sei

$$X := H(1, \ldots, n) = \operatorname{diag}(1, \ldots, n, -n, \ldots, -1) \in \mathfrak{h}.$$

Da die Einträge von X paarweise verschieden sind wirkt S_{2n} treu auf dem Orbit $\mathcal{O} := S_{2n} \cdot X$, und damit auch $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$. Es sei $\omega \cdot X = H(a_1, \ldots, a_n)$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit

$$\varepsilon_i := \operatorname{sgn} a_i \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

Es ist

$$\{\operatorname{sgn}(a_i)a_i \mid i = 1, \ldots, n\} = \{1, \ldots, n\}.$$

denn ansonsten gebe es $1 \leq i \neq j \leq n$ mit $\operatorname{sgn}(a_i)a_i = \operatorname{sgn}(a_j)a_j$. Dann wären a_i, a_j, $-a_i$ und $-a_j$ vier Diagonaleinträge von $\omega \cdot X$ mit gleichen Betrag. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\omega \cdot X$ aus X durch Permutation der Diagonaleinträge entsteht.

Es gibt also ein eindeutiges $\pi \in S_n$ mit

$$\operatorname{sgn}(a_i)a_i = \pi^{-1}(i) \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tau_\pi \cdot X &= H(\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(n)) = H(\operatorname{sgn}(a_1)a_1, \ldots, \operatorname{sgn}(a_n)a_n) \\ &= \sigma_\varepsilon \cdot H(a_1, \ldots, a_n) = \sigma_\varepsilon \cdot \omega \cdot X. \end{aligned}$$

Da $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf $\mathcal{O}$ wirkt ist deshalb $\tau_\pi = \sigma_\varepsilon\, \omega$ und somit $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$.

2. Es sei $\omega \in \mathcal{N}_{S_n} \cap \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2}$. Da $\omega \in \mathcal{N}_{S_n}$ permutiert ω die positive und negativen Diagonaleinträge von X untereinander, aber nicht miteinander. Insbesondere bleiben die Vorzeichen der Diagonaleinträge von X unter ω erhalten. Für $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\sigma_\varepsilon = \omega$ ist damit $\varepsilon_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Also ist $\varepsilon = 1$ und somit $\omega = \sigma_\varepsilon = \sigma_1 = 1$.

3. Es seien $\pi \in S_n$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z}/2)^n$. Es sei $\varepsilon' \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit $\varepsilon' = (\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)})$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_\pi^{-1} \cdot X = \tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_{\pi^{-1}} \cdot X \\ =& \tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot H(\pi(1), \ldots, \pi(n)) = \tau_\pi \cdot H(\varepsilon_1\pi(1), \ldots, \varepsilon_n\pi(n)) \\ =& H(\varepsilon_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \varepsilon_{\pi^{-1}(n)}n) = \sigma_{\varepsilon'} \cdot X. \end{aligned}$$

Da $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ treu auf $\mathcal{O}$ wirkt ist damit $\tau_\pi \cdot \sigma_\varepsilon \cdot \tau_\pi^{-1} = \sigma_{\varepsilon'}$ für $\varepsilon' \in (\mathbb{Z}'/2)^n$ mit
□

Es gilt nun $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J)$ zu bestimmen, wobei $\pi_J^{-1} = \pi_J$. Für alle $\pi \in S_n$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\pi_J \tau_\pi \pi_J(i) = \pi_J \tau_\pi(2n + 1 - i) = \pi_J(2n + 1 - \pi(i)) = \pi(i) = \tau_\pi(i)$$

sowie

$$\pi_J \tau_\pi \pi_J(2n + 1 - i) = \pi_J \tau_\pi(i) = \pi_J(\pi(i)) = 2n + 1 - \pi(i) = \tau_\pi(2n + 1 - i),$$

also ist $\mathcal{N}_{S_n} \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2}$ wird von den Transpositionen $(i,\ 2n+1-i)$ für $i = 1, \ldots, n$ erzeugt, und für jede solche Transposition ist

$$\pi_J(i,\ 2n + 1 - i) = (i,\ 2n + 1 - i) = (i,\ 2n + 1 - i)\pi_J$$

Also ist auch $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$. Damit ist nach Proposition 3.4 auch schon $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \subseteq Z_{S_{2n}}(\pi_J)$ und somit

$$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J) = N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}).$$

Ingesamt haben wir damit die Isomorphismen

$$\begin{aligned} W &= N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = (\mathcal{N}_\mathrm{D} \rtimes \mathcal{N}_\mathrm{P})/\mathcal{N}_\mathrm{D} \\ &\cong \mathcal{N}_\mathrm{P} = N_{\mathrm{P}_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) \cap G \\ &\cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J) = N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n} \\ &\cong (\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S_n. \end{aligned}$$

Die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ entspricht dabei der Wirkung von $(\mathbb{Z}/2)^n$ auf $\mathfrak{h}$ durch

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n)$$

zusammen mit der Wirkung von S_n auf $\mathfrak{h}$ durch

$$\pi \cdot H(a_1, \dots, a_n) = H(a_{\pi^{-1}(1)}, \dots, a_{\pi^{-1}(n)})$$

Zusammen mit dem Isomorphismus

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto H(a_1, \dots, a_n)$$

ergibt sich für die Wirkung von G auf $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ die Klassifikation halbeinfacher Orbiten

$$\begin{aligned} k^n / ((\mathbb{Z}/2)^n \rtimes S_n) &\to \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher } G\text{-Orbit}\}, \\ [(a_1, \dots, a_n)] &\mapsto \mathcal{O}_{H(a_1, \dots, a_n)}, \end{aligned}$$

wobei $(\mathbb{Z}/2)^n$ auf k^n durch

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\varepsilon_1 \lambda_1, \dots, \varepsilon_n \lambda_n)$$

wirkt und S_n durch Permutation der Einträge.

3.1.4 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ selbst

Wie bereits gezeigt, schränkt sich der Isomorphismus

$$\Phi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}_{2n}(k), A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}$$

zu einem Isomorphismus $\Psi \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ mit

$$\mathfrak{h}' = \{\mathrm{adiag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in k\}$$

ein, wobei für alle $H(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \Psi(H(a_1, \dots, a_n)) &= \Gamma H(a_1, \dots, a_n) \Gamma^{-1} \\ &= \mathrm{adiag}(ia_1, \dots, ia_n, -ia_n, \dots, -ia_1), \end{aligned}$$

und Φ induziert eine Bijektion zwischen den halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter der Konjugationswirkung von $O_{2n}(k)$ und den halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g}$ unter Konjugationswirkung von G.

3.1.5 Beipiel $\mathfrak{so}_4(k)$

3.2 $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ unter $SO_{2n}(k)$

Es seien $\mathfrak{g}$, G und $\mathfrak{h}$ wie im vorherigen Abschnitt und

$$SG := \{S \in G \mid \det S = 1\}.$$

Da der Isomorphismus

$$\varphi\colon G \to O_{2n}(k), S \mapsto \Gamma S \Gamma^{-1}$$

durch Konjugation gegeben ist, erhält er die Determinante, und schränkt sich deshalb zu einem Isomorphismus $SG \cong SO_{2n}(k)$ ein. Wie bereits zuvor induziert der Isomorphismus

$$\Phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}_{2n}(k), A \mapsto \Gamma A \Gamma^{-1}$$

eine Bijektion zwischen den halbeinfachen Orbiten unter SG und unter $SO_{2n}(k)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} N_{SG}(\mathfrak{h}) &= N_G(\mathfrak{h}) \cap SG = \{S \in N_G(\mathfrak{h}) \mid \det S = 1\} \quad \text{sowie analog} \\ Z_{SG}(\mathfrak{h}) &= Z_G(\mathfrak{h}) \cap SG = \{S \in Z_G(\mathfrak{h}) \mid \det S = 1\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G$. Für $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) \in \mathrm{D}_{2n}(k)$ ist $D^S = \operatorname{diag}(\lambda_{2n}, \ldots, \lambda_1)$, also genau dann $D^{-1} = D^S$, wenn $\lambda_{2n+1-i} = \lambda_i^{-1}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Es folgt, dass

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}_{2n}(k) \cap G = \{\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}, \ldots, \lambda_1^{-1}) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k^\times\}.$$

Deshalb ist ist $\det D = 1$ für alle $D \in Z_G(\mathfrak{h})$, und somit

$$Z_{SG}(\mathfrak{h}) = Z_G(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathrm{D}}.$$

Es sei $M \in N_G(\mathfrak{h})$ mit $M = DP$ bezüglich $N_G(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \mathcal{N}_{\mathrm{P}}$. $\det D = 1$ ist ist $\det M = \det P$

Damit ist

$$N_{SG}(\mathfrak{h}) = N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(k) = (\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \mathcal{N}_{\mathrm{P}}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(k) = \mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}},$$

wobei

$$\check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}} = \mathcal{N}_{\mathrm{P}} \cap \mathrm{SL}_{2n}(k) = \{P \in N_G(\mathfrak{h}) \cap \mathrm{P}_{2n}(k) \mid \det P = 1\}.$$

Der Isomorphismus

$$N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = (\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \mathcal{N}_{\mathrm{P}})/\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \cong \mathcal{N}_{\mathrm{P}}$$

schränkt sich deshalb zu einem Isomorphismus

$$N_{SG}(\mathfrak{h})/Z_{SG}(\mathfrak{h}) = (\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}})/\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \cong \check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}}$$

ein.

Für $\pi \in S_{2n}$ ist $\det A_\pi = \operatorname{sgn} \pi$. Deshalb schränkt sich der Isomorphismus

$$\mathcal{N}_{\mathrm{P}} \cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J)$$

zu einem Isomorphismus

$$\check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}} \cong N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\pi_J) \cap A_{2n}$$

ein, wobei

$$A_{2n} = \{\pi \in S_{2n} \mid \operatorname{sgn} \pi = 1\}.$$

Dabei ist

$$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap Z_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}.$$

Da S_n von den Transpositionen $\pi_i \coloneqq (i, \quad i+1)$ mit $1 \leq i < n$ erzeugt wird, wird $\mathcal{N}_{S_n}$ von den Permutationen

$$\tau_{\pi_i} = (i, \quad i+1)(2n+1-i, \quad 2n-i) \quad \text{mit } 1 \leq i < n$$

erzeugt. Damit ist insbesondere $\det \tau_\pi = 1$ für alle $\pi \in S_n$. Für alle $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n$ mit

$$n_\varepsilon \coloneqq |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varepsilon = -1\}|$$

ist σ_ε das Produkt von von n_ε vielen Transpositionen und damit

$$\det \sigma_\varepsilon = (-1)^{n_i} = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n.$$

Für ein beliebiges $\omega \in N_{S_{2n}}(\mathfrak{h})$ mit $\omega = \sigma_\varepsilon \tau_\pi$ bezüglich $N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$ ist damit

$$\det \omega = (\det \tau_\pi)(\det \sigma_\varepsilon) = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n.$$

Motiviert hiervon nennen wir ein Element $\varepsilon \in (\mathbb{Z}/2)^n$ *gerade*, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = 1$ und *ungerade* falls $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n = -1$.

Nach diesen Überlegungen schränkt sich die Zerlegung

$$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) = \mathcal{N}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$$

zu einer Zerlegung

$$N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap A_{2n} = \check{\mathcal{N}}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n}$$

ein, wobei

$$\check{\mathcal{N}}_{\mathbb{Z}/2} = \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \text{ ist gerade}\}.$$

Dabei gilt

$$(\mathbb{Z}/2)^{n-1} \cong \{\sigma_\varepsilon \mid \varepsilon \text{ ist gerade}\},$$
$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \mapsto (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n).$$

Insgesamt gelten somit die Isomorphismen

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; SO_{2n}(k)) = N_{SO_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) / N_{SO_{2n}(k)}(\mathfrak{h}) &= \mathcal{N}_{\mathrm{D}} \rtimes \check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}} \\ \cong \check{\mathcal{N}}_{\mathrm{P}} = N_{S_{2n}}(\mathfrak{h}) \cap A_{2n} &= \check{\mathcal{N}}_{\mathbb{Z}/2} \rtimes \mathcal{N}_{S_n} \\ \cong (\mathbb{Z}/n)^{-1} \rtimes S_n. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Isomorphismus

$$k^n \cong \mathfrak{h}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto H(a_1, \dots, a_n)$$

ergibt sich damit die Klassifikation der halbeinfachen Orbiten in $\mathfrak{g}$ unter SG

$$\begin{aligned} k^n/((\mathbb{Z}/2)^{n-1} \rtimes S_n) &\xrightarrow{\sim} \{\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g} \mid \mathcal{O} \text{ ist ein halbeinfacher } SG\text{-Orbit}\}, \\ [(a_1, \ldots, a_n)] &\mapsto \mathcal{O}_{H(a_1,\ldots,a_n)}. \end{aligned}$$

Unter diesem Isomorphismus entspricht die Wirkung von W auf $\mathfrak{h}$ der Wirkung von $(\mathbb{Z}/n)^{n-1}$ durch

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} a_{n-1}, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n a_n)$$

zusammen mit der Wirkung von S_n durch Permutation der Einträge.